

THESES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

ANDRÉ L E N T I N

1ère thèse : *Contribution à une théorie des Equations dans les monoïdes libres.*

2ème thèse : *Le théorème de R.H.BING sur l'approximation d'une surface par un polyèdre et quelques-unes de ses conséquences.*

Soutenues le 1er juillet 1969 devant la Commission d'Examen

MM. C. CHEVALLEY

Président

R. de POSSEL

M-P. SCHÜTZENBERGER

Examineurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551519_0018

THESES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

ANDRÉ LENTIN

1ère thèse : *Contribution à une théorie des Equations dans les monoïdes libres.*

2ème thèse : *Le théorème de R.H.BING sur l'approximation d'une surface par un polyèdre et quelques-unes de ses conséquences.*

Soutenues le 1er juillet 1969 devant la Commission d'Examen

MM. C. CHEVALLEY

Président

R. de POSSEL

Examineurs

M-P. SCHUTZENBERGER

THESE

THESE



Autant du moins qu'un remerciement même public peut le faire, je voudrais d'abord acquitter ici les dettes de reconnaissance que j'ai contractées à diverses époques envers mon Maître René de POSSEL. Jadis, j'avais bénéficié de son enseignement "d'avant-garde", si différent de ce qu'on trouvait communément alors. Naguère, il m'a donné la possibilité de revenir à la recherche après une carrière "pédagogique", au cours de laquelle j'avais défendu, à son exemple, et dans la mesure de mes forces, la cause des mathématiques vivantes. J'ai pu désormais travailler auprès de lui, au sein d'une équipe pluridisciplinaire avant la lettre, en cet Institut Blaise PASCAL, dont sont sortis maints travaux de valeur.

Le Professeur Claude CHEVALLEY a bien voulu présider le jury de cette Thèse. C'est pour moi un très grand honneur - j'en suis parfaitement conscient - et je lui en exprime ma profonde gratitude. Cet honneur, je voudrais que l'Auteur de tant d'œuvres prestigieuses,

en théorie des groupes et des algèbres de LIE, notamment, me permette de le reporter sur le domaine où j'ai tenté de frayer un chemin.

Les problèmes que j'ai rencontrés présentent un aspect que l'on qualifie, traditionnellement de combinatoire, sans donner de ce mot intuitivement riche, mais fort obscur, une définition satisfaisante.

Une grande partie des recherches de Marcel-P. SCHÜTZENBERGER tend à réduire, là où faire se peut, la zone de "pénombre combinatoire" à la lumière de l'Algèbre. Désireux de le suivre sur cette voie, j'ai entrepris le présent travail, qui n'existerait pas sans lui, et je le lui dédie.

Πάντα νομιστί, ἔτεῃ δὲ
μόνα τὰ στοιχεῖα.

Démocrite.

(Tout est convention , seul
l' alphabet est réel .)

Introduction

Contribution à une théorie des
ÉQUATIONS DANS LES MONOÏDES LIBRES

(avec des applications à la théorie des permutations
et du groupe symétrique).

Introduction.

A. On sait que l'étude des équations dans les diverses structures classiques n'a cessé, au fil de l'histoire, de susciter des problèmes inséparables du développement même de la mathématique.

On sait, d'autre part, qu'à en juger d'après les travaux de certains algébristes (Cf par exemple C. CHEVALLEY [1]) ou logiciens (W. V. QUINE [9]), il n'est pas abusif de tenir la structure de monoïde libre pour une "structure mère".

Il apparaît donc paradoxal de constater qu'une théorie générale des équations dans les monoïdes libres reste à édifier. Rares en effet sont les articles qui se rapportent à ce domaine et les mathématiciens qui l'abordent ne le font guère, semble-t-il, qu'en vue de résoudre tels problèmes préliminaires à l'étude des

équations dans les groupes libres (R.C. LYNDON [6] ; M.P. SCHÜTZENBERGER [10]) ou encore dans les anneaux de polynômes ou de séries formelles (P.M. COHN [2]).

Notons le à ce propos, l'expérience confirme ce que suggère l'intuition, à savoir que l'étude d'équations dans de telles structures algébriques ne peut pas ne pas soulever une série de questions préalables qui ressortissent à la seule structure de monoïde libre et y conduisent à des équations.

Puisqu'il en est ainsi, de très probables applications à des théories importantes justifieraient déjà que l'on s'intéressât plus systématiquement aux équations dans les monoïdes libres. Mais il y a plus. Nous croyons pouvoir dire qu'en avançant dans leur étude, on découvre que ces équations présentent en elles-mêmes un intérêt mathématique certain, et qu'au terme de cheminements parfois imprévus, elles ramènent à des théories classiques qu'elles contribuent à enrichir.

Encore n'avons nous signalé, s'agissant d'applications, que certaines branches des mathématiques pures. Si c'en était le lieu ici, nous pourrions insister sur l'intérêt spécifique des équations dans les monoïdes libres relativement à des disciplines telles que la linguistique formelle, l'informatique et autres. La liste aurait d'ailleurs de quoi surprendre. Elle inclurait, par

exemple, la biologie moléculaire, ainsi qu'en témoigne cet article du "Bulletin of Mathematical Biophysics" (Volume 28, 1966), publié par MM. J.E. MOSIMANN, M.B. SHAPIRO, C.R. MERRIL, D.F. BRADLEY et J.E. VINTON du "National Institute of Health, Bethesda, (Maryland)", sous le titre de "Reconstruction of protein and nucleic acide sequences: the algebra of free monoids and the fragmentation stratagem".

*

Les diverses raisons ci-dessus évoquées nous ont conduit à entreprendre le présent travail; il constitue à la fois une introduction et - du moins l'espérons nous - une contribution à une future théorie des équations dans les monoïdes libres.

Introduction, car nous y dégageons un certain nombre de concepts de base et de méthodes spécifiques.

Contribution, en ce sens que nous y donnons des énoncés fondamentaux, comme le "Théorème des solutions principales" et la "Propriété du défaut", que nous y traitons substantiellement du cas linéaire (qui inclut le très important cas "bipermutationnel"), que nous obtenons des résultats dans le cas "équilibre", enfin, et surtout, que nous montrons qu'il ne s'agit pas d'une théorie isolée.

B. Dans ce travail, X étant un ensemble quelconque, nous désignons par X^* le monoïde

libre de base X . Lorsque X ne contient qu'une seule lettre t - seul cas où X^* est cyclique (et il est alors isomorphe au monoïde additif des entiers naturels) - nous écrirons t^* au lieu de $\{t\}^*$.

Un couple de mots $f, f' \in X^*$ détermine une équation que nous écrivons (f, f') , et non point $f = f'$, afin de réserver le signe d'égalité aux seules égalités effectives.

Les solutions particulières dans Y^* d'une équation $(f, f') \in X^* \times X^*$ sont les morphismes $\varphi: X^* \rightarrow Y^*$ tels que:

$$(1) \quad \varphi f = \varphi f';$$

$$(2) \quad \varphi x = e \text{ (le mot vide) pour tout } x \text{ tel que } f, g \in (X \setminus \{x\})^*;$$

de plus, nous dirons solution sur Y^* si et seulement si il n'existe aucune partie propre Y_1 de Y telle que $\varphi X \subset Y_1^*$.

Pour illustrer cette définition d'un exemple, soit, avec $X = \{a, b, c, d\}$ et $Y = \{y, t\}$ les mots $f = a^2 b^2 c^2$, $f' = d^2$. L'équation (f, f') , qui se rencontre en théorie des groupes (Cf M. HALL [3]), admet la solution particulière $\varphi: X^* \rightarrow Y^*$ où:

$$\varphi a = ty; \varphi b = yyt; \varphi c = yt yy; \varphi d = ty ty yy ty.$$

En effet, substituant φx à x dans f et f' , pour $x \in X$, on obtient deux mots égaux, à savoir (en marquant la scansion à l'aide de parenthèses):

$$\varphi f = (ty)(ty)(yyt)(yyt)(yt yy)(yt yy),$$

$$\varphi f' = (ty \quad ty \quad yyt \quad yy)(ty ty \quad y \quad yt yy).$$

Plus généralement, une famille de solutions particulières

sur Y^* , dépendant de quatre paramètres entiers naturels $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, est donnée, comme on pourra le vérifier, par :

$$\varphi a = y^\alpha t y^{\alpha'}; \varphi b = y^\beta t y^{\beta'}; \varphi c = y^{\alpha+\alpha'-\beta} t y^{\beta+\beta'-\alpha}.$$

C. Soit maintenant Y'^* un autre monoïde libre et soit $\varphi': X^* \rightarrow Y'^*$ une solution de (f, f') dans Y'^* . Nous dirons que la solution φ' procède de la solution φ si et seulement s'il existe un morphisme $\chi: Y^* \rightarrow Y'^*$ tel que $\chi\varphi = \varphi'$. Le cas échéant, nous préciserons que φ' procède de φ au moyen de χ . Il est clair que la relation «procède de» est un préordre.

Le problème se pose donc de savoir s'il existe un ensemble minimal W , fixe et ne dépendant que de l'équation $(f, f') \in X^* \times X^*$, et une famille privilégiée de solutions sur W^* , soit $\Psi(f, f'; W^*)$, tels que toute solution de (f, f') dans un monoïde libre quelconque procède d'une solution privilégiée.

A priori, une telle question admet certainement une réponse formelle, mais il paraîtra remarquable, peut-être, qu'un tel ensemble W soit fini.

Plus précisément, supposant que l'équation (f, f') est propre (c'est à dire que les mots f et f' de X^* ne sont pas identiques, $f \neq f'$) nous montrons (Théorème : Propriété du défaut) que l'on a toujours

$$\text{Card}_{\text{min}} W < \text{Card}_{\text{min}} X,$$

ce qui dans un autre langage pourrait se formuler :

" L'intersection de tous les sous monoïdes libres
" contenant un sous-monoïde engendré par un .

"ensemble A donné dans X^* est elle-même un sous-monoïde libre dont la base a au plus $\text{Card } W$ éléments."

Intuitivement, $\text{Card } W$ est le nombre des mots arbitraires figurant dans les solutions de l'équation et il mesure en quelque sorte la force des contraintes qu'impose celle-ci. Par exemple, $\text{Card } W$ est égal à 1 si et seulement si toute solution φ de (f, f') est un morphisme dans un monoïde cyclique (c'est à dire, comme plus haut mentionné, engendré par un mot unique), ce qui est typiquement le cas des équations de la forme $(a^m b^n, c^p)$ avec $m, n, p \geq 2$ ou $(a^m b^n c^p, d^q)$ avec $m, n, p, q \geq 3$, ainsi que nous l'avons montré dans une Note antérieure [5].

A défaut de savoir résoudre toutes les équations d'une forme donnée, le problème se pose donc de borner supérieurement ou inférieurement $\text{Card } W$. C'est ce que nous faisons dans deux ^{cas.} importants : celui des équations linéaires (nous avons même alors la valeur exacte) et celui des équations dites équilibrées. Sous cette dernière hypothèse, une propriété des solutions privilégiées, que nous appelons principales, nous permet de prouver que $\text{Card } W$ est borné supérieurement par un autre entier, solution d'un certain problème aux frontières (en abrégé (PF)).

Dans le cas encore plus particulier des équations à la fois linéaires et équilibrées (nous disons typé-mutationnelles, puisque chaque membre est une permutation de l'ensemble X des inconnues présentes), non seulement nous calculons $\text{Card } W$ - il est donné

par la demi-somme de $-1 + \text{Card } X$ et du nombre des cycles disjoints d'une certaine substitution paire — mais nous entreprenons d'aller plus avant dans l'étude des solutions.

C'est à cette question, à ces questions, qu'est consacrée la seconde partie de notre travail, qui nécessite, de fait, l'établissement d'une théorie autonome, fondée sur certaines constructions qui utilisent le groupe symétrique. Pour résumer cette théorie, il nous faut ^{d'abord} faire un bref retour sur un point de méthode.

D. Si la méthode mise en œuvre au début du mémoire traite les équations isolément, une autre, dont le principe remonte à F.W. LEVI [6], amène à les regrouper par familles. A cette fin, il se révèle plus expédient de considérer, préalablement à toute interprétation équationnelle, des paires de mots $(f, f') \in X^* \times X^*$, en bref des bimots, et de définir à leur propos certaines opérations unaires que nous appelons p-opérations, et qui les organisent en p-systèmes.

Les p-systèmes de bimots entrent dans le cadre général des Systèmes algébriques au sens de l'Algèbre Universelle, ce qui introduit la problématique attachée à ces objets, notamment la question du groupe d'automorphismes. A ce propos, et en anticipant, mentionnons que pour les p-systèmes, dont nous aurons à faire un usage intensif, nous avons établi que leur groupe d'automorphismes est diédral.

Dans la perspective indiquée plus haut, nous sommes conduits à étudier plus particulièrement d'une part les systèmes (et équations) linéaires,

d'autre part les systèmes (et équations) équilibrés, enfin, à l'intersection, les systèmes (et équations) bipermutationnelles.

Concernant les systèmes équilibrés, nous déterminons, en liaison avec le problème (PF), un invariant qui, dans le cas bipermutationnel, conduit à définir une nouvelle opération dans le groupe symétrique. De plus, dans ce dernier cas, nous prouvons l'équivalence de (PF) avec le calcul de Card W .

Nous avons insisté sur le fait que le cas bipermutationnel se trouvait sous la dépendance étroite du groupe symétrique; en retour, nous venons de voir qu'il y suscitait des problèmes nouveaux. Dans cet ordre d'idées, il est par exemple remarquable que le problème (PF), issu de la théorie des équations, équivale dans ce cas à un problème extrémal en théorie des substitutions — et qu'il cède sous cette forme — [4]. Pour traiter les problèmes de cette sorte, nous sommes amené à définir sur les groupes symétriques un opérateur de délétion $\mathcal{S}: \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_{n-1}$, et à en établir quelques propriétés, dont l'intérêt nous semble dépasser le cadre des applications qui en sont faites ici.

E. Pour l'essentiel, notre travail dans le cas bipermutationnel se résume ainsi. Nous considérons un ensemble X et les couples (f, f') de permutations de X , disons les bipermutations. L'application naturelle de f sur le segment $1, 2, \dots, k$ où $k = \text{Card } X$ projette f' sur la permutation typique ou type de la bipermutation.

Le premier élément de f figure dans f' à une certaine place ; l'opération de pivot initial gauche, en bref opération pig se définit comme laissant f invariant et amenant, dans f' , ~~amène~~ l'élément, d'abord initial, immédiatement avant celui qui est premier dans f . On définit corrélativement l'opération de pivot initial droit, ou pid.

Par exemple, pour $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, à partir de la bipermutation :

$$(a b c d e f g, d g c e a f b),$$

on forme successivement :

$$\text{par pig : } (a b c d e f g, g c e d a f b),$$

$$\text{par pig : } (a b c d e f g, c e d g a f b),$$

$$\text{par pid : } (b a c d e f g, c e d g a f b),$$

$$\text{par pig : } (b a c d e f g, e d g a f c b),$$

etc.

On définit par ce moyen des systèmes et classes de bipermutations et, par projection, des systèmes et classes de types ; et l'on s'intéresse aux classes indécomposables.

L'étude des classes et systèmes indécomposables se ramène à l'étude des classes et systèmes indécomposables et non réductibles : en gros, f et f' n'admettent pas de facteur commun intérieur.

La problématique des pi-systèmes fait jouer un rôle distingué aux bipermutations involutives : celles pour lesquelles le couple (f, f') définit une involution $\varepsilon \in \mathbb{G}_X$. En particulier, nous avons eu à considérer certaines bipermutations involutives dites spéciales ou de type spécial.

Un type, c'est à dire une permutation de l'ensemble des k premiers entiers positifs, $k = \text{Card } X$, sera dit spécial si, et seulement si le premier élément en est k , le dernier 1, et si le reste est formé de segments naturels, globalement laissés dans leur ordre initial, mais individuellement retournés; par exemple, pour $k = 12$:

12 | 4 3 2 | 5 | 7 6 | 11 10 9 8 | 1.

A chaque système S , nous attachons une substitution invariante σ , puis nous définissons des décompositions dites adaptées de σ en produit de deux involutions. Notre résultat principal est que, pour toute décomposition adaptée de σ , il existe dans S une bipermutation involutive qui "réalise" d'une certaine manière cette décomposition. Il en découle entre autres conséquences la propriété, plus haut signalée, du groupe d'automorphismes.

Un autre résultat est que chaque système (ou classe) contient au moins une bipermutation d'un type spécial, ce qui permet de majorer le nombre des systèmes utiles pour les équations bipermutationnelles.

F. Parti d'une recherche concernant les équations, nous avons débouché sur des problèmes qui ressortissent au seul groupe symétrique, et nous avons pu les résoudre grâce à des techniques suggérées par le point de vue équationnel. Mais il s'agissait encore de problèmes plus ou moins médiatement reliés par leur "histoire" à nos recherches initiales. Que nos techniques restent efficaces hors de ce cadre, nous avons à cœur

d'en faire la preuve en la appliquant à une question venue "de l'extérieur": c'est pourquoi, en appendice, nous traitons un problème issu d'une recherche de O. ORE [8].

Déjà, dans une NOTE publiée en collaboration [4], nos collaborateurs et nous-même avons prouvé le résultat mentionné de cet Auteur, en prouvant que toute substitution paire d'ordre n est au moins une fois le commutateur d'un cycle maximal (de longueur n) et d'une involution.

Poursuivant l'étude de cette question, nous caractérisons pour tout $\sigma \in \mathcal{A}_n$ l'ensemble des paires (γ, ε) , γ cycle maximal, ε involution, telles que $\gamma \varepsilon \sigma = \varepsilon \gamma$, la méthode se prêtant à l'écriture d'un algorithme en vue d'un calcul automatique.

1. Solutions principales.

1. Solutions principales.

1.1. Existence et propriétés.

1.1.1. NOTATIONS ET TERMINOLOGIE. Dans cette section, l'équation considérée $(f, f') \in X^* \times X^*$ reste fixe, nous désignons par $\Phi(Y^*)$ l'ensemble de ses solutions dans et sur un monoïde libre Y^* , par $|g|$ la longueur d'un mot $g \in Y^*$, et nous introduisons une lettre distinguée t .

$\Phi(t^*)$ peut être appelée la famille des solutions en longueurs pures. En effet, pour $\theta \in \Phi(t^*)$ et $x_i \in X$, on a $\theta x_i = t^{\lambda_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $\lambda_i = |\theta x_i|$; la solution θ est caractérisée par le vecteur des longueurs:

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k$, $k = \underset{\text{min}}{\text{Card}} X$,
vecteur que, par abus de langage, on nommera la longueur de θ .

Nous commençons par attacher à chaque $\theta \in \Phi(t^*)$ un alphabet $\overline{X}_\theta$ et un morphisme $\overline{\theta}: X^* \rightarrow \overline{X}_\theta^*$ qui pourra être qualifié de θ -libre. A cette fin, pour $|g| > 0$ et $j \in [|g|]^\dagger$, nous désignons par $g^{(j)}$ la j -ème

$\dagger$ Pour $n \in \mathbb{N}$, la notation $[n]$ désigne $\{1, 2, \dots, n\}$ pour $n > 0$, sinon $\emptyset$.

lettre de $g \in Y^*$, à savoir l'unique $y \in Y$ tel que l'on ait $g = g_1 y g_2$, $g_1 \in Y^{j-1}$, $g_2 \in Y^*$. Si l'ordinal j est égal à 1 (resp. à $|g|$), $g^{(j)}$ est l'initiale (resp. ultime) de g .

1.1.2. DÉFINITIONS. Soit $\theta \in \Phi(t^*)$; nous représentons par :

a) X_θ l'ensemble des paires (x, j) où x parcourt l'ensemble des $x' \in X$ tels que $|\theta x'| > 0$ et où, pour x' donné, j décrit l'ensemble $[\theta x']$;

b) $\theta^\#$ le morphisme $\theta^\#: X^* \rightarrow X_\theta^*$ envoyant tout $x \in X$ sur le mot vide e si $|\theta x| = 0$, sinon, sur le mot :
 $(x, 1)(x, 2) \dots (x, |\theta x|)$;

c) $\mathcal{E}_\theta$ ^(a) l'ensemble (ou relation)

$\left\{ (g^{(j)}, g'^{(j)}) \in X_\theta \times X_\theta : j \in [|g|] \right\}$, où $g = \theta^\# f$, $g' = \theta^\# f'$;

d) $\overline{\mathcal{E}_\theta}$ la congruence sur X_θ^* engendrée par $\mathcal{E}_\theta$;

e) $\overline{X}_\theta$ l'ensemble quotient $X_\theta / \overline{\mathcal{E}_\theta}$;

f) $\theta^\natural$ le morphisme naturel de X_θ vers $\overline{X}_\theta^*$;

g) $\bar{\theta}$ le morphisme $\theta^\natural \theta^\#: X^* \rightarrow \overline{X}_\theta^*$.

Remarques. (1) L'entier positif i figurant dans (x, i) n'est autre que l'ordinal de (x, i) dans $\theta^\# x$, mais comme on peut avoir simultanément $x = f^{(j)}$, il sera commode de nommer i le sous-ordinal.

(2) Les définitions de $\mathcal{E}$ et $\overline{\mathcal{E}}$ sont valables dans tous les monoïdes pour des paires de mots d'égale longueur.

1.1.3. PROPOSITION. Le morphisme $\bar{\theta}$ est une solution de (f, f') sur $\overline{X}_\theta^*$. En outre, quels que soient l'en-

(a) $\mathcal{E}$: ensemble à Ordinaux Égaux.

semble Y et la solution $\varphi \in Y^*$, il existe une solution en longueurs pures $\theta' \in \Phi(t^*)$ telle que φ procède de θ' au moyen d'un morphisme littéral (id est: qui envoie $\overline{X_{\theta'}}$ dans Y).

Preuve. - L'hypothèse $\theta \in \Phi(t^*)$ équivalant à $|\theta f| = |\theta f'|$ et la construction de $\theta^\#$ impliquant $|\theta^\# f| = |\theta f|$, on a $|g| = |g'|$. La conclusion $g = g'$, c'est à dire $\bar{\theta} \in \Phi(\overline{X_\theta}^*)$, résulte alors du fait trivial que deux mots h et h' , de même longueur m , sont égaux à la condition nécessaire et suffisante que $h^{(j)} = h'^{(j)}$ pour tout $j \in [m]$.

Considérons maintenant une solution $\varphi \in \Phi(Y^*)$. Soit τ l'unique morphisme littéral de Y^* dans t^* et soit $\theta' = \tau\varphi$; on a $\theta' \in \Phi(t^*)$. Revenant par commodité à la notation θ (pour θ'), posons $h = \varphi f$, $h' = \varphi f'$ et utilisons les notations 1.1.2. Il est clair que l'égalité de $g^{(i)}$ avec $g^{(j)}$ (ou $g'^{(j)}$) implique $h^{(i)} = h^{(j)}$ (ou $h'^{(j)}$), donc que la relation $(g^{(i)}, g^{(j)}) \in \overline{\mathcal{E}}_\theta$ implique $(h^{(i)}, h^{(j)}) \in \overline{\mathcal{E}}(h, h')$; d'où $\varphi = \gamma \bar{\theta}$ avec γ littéral.

1.1.4. Conséquences. La proposition précédente justifie pour $\bar{\theta}$ la qualification de $\bar{\theta}$ -libre; nous poursuivons l'étude de ce morphisme.

Dans chaque $\theta^\#x$ est défini sur les lettres (x, i) un ordre total par les sous-ordinaux croissants, d'où un ordre partiel dans X_θ . De manière informelle, disons que le comportement de cet ordre par rapport au morphisme $\theta^\#$ pose le problème des conséquences: "quelque chose" passe "plus ou moins" à travers le morphisme.

Pour préciser, nous associons à tout mot $h \in \overline{X_\theta}^*$ l'ensemble $\mathcal{D}(h)$ de ses digrammes, c'est à dire

l'ensemble des mots de longueur 2, $zz' \in \overline{X_0}^*$, tels que l'on ait $zz' = h^{(j)} h^{(j+1)}$ pour quelque $j \in [h|-1]$. Relativement à $\bar{g} = \bar{\theta}f = \bar{\theta}f' (= \bar{g}')$, un digramme yy' sera dit frontalier si et seulement s'il existe un facteur gauche f_A de f ou de f' tel que l'on ait $0 < |f_A| < |\bar{g}|$ et $j = |f_A|$. On écrira $yy' \in \mathcal{D}_F(\bar{g})$. Supposant par exemple que f_A soit facteur gauche de f , il s'ensuit:

$$f = f_A f_B; |f_A| > 0; f_A = f_1 x; f_B = x' f_2; x, x' \in X.$$

On a donc $y = \theta^{\sharp}(x, |0x|)$ et $y' = \theta^{\sharp}(x', 1)$; autrement dit, y est l'ultime de $\bar{\theta}x$ et y' l'initiale de $\bar{\theta}x'$.

On notera que le fait pour un digramme d'être frontalier n'empêche pas qu'il puisse aussi présenter des occurrences intérieures, c'est à dire appartenir conjointement à $\bigcup_{x \in X} \mathcal{D}(\bar{\theta}x)$.

1.1.5. LEMME. Une condition nécessaire et suffisante pour que la lettre $z \in \overline{X_0}$ soit toujours la première lettre du même digramme non frontalier $zz' \in \mathcal{D}(\bar{g})$ est que z ne présente aucune occurrence ultime (id est : $z \neq \theta^{\sharp}(x, |0x|)$ pour tout $x \in X$), et l'on a alors $z \neq z'$.

Énoncé dual en remplaçant première par seconde, zz' par $z'z$, ultime par initiale.

Preuve. - A. La condition est nécessaire car si z avait une occurrence ultime, cette occurrence entrerait dans un digramme frontalier, à moins qu'elle n'entrât dans aucun digramme.

B. Il résulte immédiatement de la définition de $\mathcal{D}_0$ que les conditions $g^{(i)} = (x, j); g'^{(i)} = (x', \ell); j < |0x|; \ell < |0x'|;$

impliquent $((x, j+1), (x', l+1)) \in \mathcal{C}_\theta$.

C. La condition est suffisante. En effet, si z n'est jamais ultime, il existe au moins une lettre $z' \in X_\theta$, $z' \neq z$ donnant lieu à au moins une occurrence intérieure du digramme $z'z$. En vertu de B., la classe correspondant à z' contient toutes celles des lettres de X_θ que l'on obtient en augmentant d'une unité les sous-ordinaux des lettres de la classe correspondant à z .

1.1.6. PROPOSITION. Les conditions $zz' \in \mathcal{D}(\bar{g})$, $zz'' \in \mathcal{D}(\bar{g})$ et $z' \neq z''$ impliquent $zz', zz'' \in \mathcal{D}_F(\bar{g})$.
même conclusion pour $z'z, z''z \in \mathcal{D}(\bar{g})$, $z' \neq z''$.

Preuve. - (1) Soit $\mathcal{R}$ la relation obtenue par union de $\mathcal{C}_\theta$, de la converse de $\mathcal{C}_\theta$ et de l'égalité; nous écrivons:
 $\mathcal{R}_n = \mathcal{R} \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \cup \dots \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \circ \dots \circ \mathcal{R})$ lorsque le dernier terme comprend n facteurs.

(2) z présente des occurrences ultimes, car au cas contraire le LEMME 1.1.5. s'appliquerait, donnant $z' = z''$.

Considérons une occurrence du digramme zz' . Il suffit d'étudier le cas où z n'est pas ultime. On a alors

$$z = \theta^j(x, j); \quad z' = \theta^j(x, j+1); \quad x \in X.$$

Soit alors n l'entier minimal tel que l'on ait, pour quelque $x' \in X$, $((x, j), (x', | \theta x' |)) \in \mathcal{R}_n$.

En vertu de cette minimalité, la condition

$$((x, j), (x'', k)) \in \mathcal{R}_{n-1} \text{ implique } k < | \theta x'' | \text{ et par conséquent (cf. B. de la preuve de 1.1.5.) } ((x, j+1), (x'', k+1)) \in \mathcal{R}_{n-1}.$$

Si l'on a pour ces occurrences $(x'', k)(x'', k+1) = g^{(m)} g^{(m+1)}$ (ou $g'^{(m)} g'^{(m+1)}$), en passant à l'ordre n par une (seule) application de $\mathcal{R}$, on en déduit que le digramme $\bar{g}^{(m)} \bar{g}^{(m+1)}$ est frontalier et égal à zz' .

1.1.7. PROPOSITION. A. Une condition nécessaire et suffisante pour que le digramme zz' soit non frontalier et contienne toutes les occurrences de z et toutes celles de z' est que l'une au moins des deux conditions soit vraie : z ne figure jamais à l'ultime, z' ne figure jamais à l'initiale, des mots $\bar{\theta}x$.

B. Une condition nécessaire et suffisante pour que le digramme $zz' \in \mathcal{D}(\bar{g})$ soit frontalier est que chacune des deux conditions soient vraies : z figure au moins une fois à l'ultime, z' figure au moins une fois à l'initiale des mots $\bar{\theta}x$.

Preuve. - A. Il est clair que la condition est nécessaire.

Compte tenu du LEMME 1.1.5., on aura montré que la condition est suffisante si l'on prouve qu'une lettre z jamais ultime ne partage pas son associé z' avec une autre. Or, si l'on avait $z_1 z', zz' \in \mathcal{D}(\bar{g})$, $z_1 \neq z$, en vertu de la PROPOSITION 1.1.6. zz' serait frontalier et z présenterait une occurrence ultime : contradiction.

B. Cette proposition ne diffère pas logiquement de la précédente, puisqu'on l'obtient en remplaçant chaque membre de l'implication mutuelle A. par sa négation. Nous l'avons explicitée dans le seul but de faciliter la lecture.

1.1.8. DÉFINITION. Une solution en longueurs pures $\theta \in \Phi(t^*)$ est dite de longueur principale et la solution θ -libre associée, soit $\bar{\theta}$, est dite principale si et seulement si $\bar{\theta}$ ne procède d'aucune solution $\bar{\theta}'$ autre qu'elle-même.

1.1.9. PROPOSITION. Une condition nécessaire et suffisante

{ pour que $\bar{\theta}$ soit principale est que chaque lettre de $\bar{X}_0$ apparaisse au moins une fois parmi les initiales ^{min} et au moins une fois parmi les ultîmes des mots $\bar{\theta}x$.

Preuve. - (1) La condition est nécessaire.

En effet, si $z \in \bar{X}_0$ n'est jamais ultîme, il existe, en vertu de la PROPOSITION 1.1.7. A. un digramme zz' , $zz' \in \mathcal{D}(\bar{g}) \setminus \mathcal{D}_f(\bar{g})$ contenant toutes les occurrences des lettres z et z' . Soit w un symbole distingué; remplaçant dans chaque $\bar{\theta}x$ toute occurrence de zz' par une de w , on obtient une solution φ de (f, f') dans un monoïde Y^* , où $Y = (\bar{X}_0 \setminus \{z, z'\}) \cup \{w\}$. La solution $\bar{\theta}$ procède de φ et φ , en vertu de la PROPOSITION 1.1.3 procède d'une solution $\bar{\theta}'$, avec $\bar{\theta}' \neq \bar{\theta}$, parce que $\theta' \neq \theta$.

(2) La condition est suffisante.

En vertu de la PROPOSITION 1.1.7. B., elle implique tout digramme est frontalier. Il en résulte que la solution $\bar{\theta}$ ne peut procéder d'une autre solution $\bar{\theta}'$ que par le moyen d'un isomorphisme; d'où $\theta = \theta'$.

1.1.10. THÉORÈME. Soit $\theta: X^* \rightarrow \{t\}^*$ une solution dans le monoïde cyclique $\{t\}^*$ d'une équation $(f, f') \in X^* \times X^*$. Il existe un ensemble $\hat{X}$ et une solution $\hat{\theta}: X^* \rightarrow \hat{X}^*$ de cette équation, uniques aux isomorphismes près, qui satisfont les deux conditions suivantes.

(1) Chaque lettre de $\hat{X}$ apparaît au moins une fois à l'initiale et au moins une fois à l'ultîme dans les mots $\hat{\theta}x$ ($x \in X$).

(2) Toute solution $\varphi: X^* \rightarrow Y^*$, telle que θ procède de φ , procède elle-même de $\hat{\theta}$.

Preuve. - A. Appelant dilatation - et désignant par la lettre $\tilde{\circ}$ - les morphismes de monoïdes libres de la forme $\varepsilon \theta^\#$ où, ε étant un isomorphisme, $\theta^\#$ répond à la DÉFINITION 1.1.2. B., on a immédiatement les propriétés suivantes :

- 1) le produit de deux dilatations est une dilatation ;
- 2) tout morphisme d'un monoïde libre vers un autre est de la forme $\gamma \tilde{\circ}$, avec γ littéral ;
- 3) si $\bar{\theta}$ est la solution θ -libre de (f, f') , $\delta \bar{\theta}$ en est une autre solution et elle procède au moyen d'un isomorphisme de la solution libre $\bar{\theta}_1$ correspondant au morphisme $\theta_1 \in \Phi(t^*)$ qui a même longueur que $\delta \bar{\theta}$;
- 4) inversement, si $\bar{\theta}$ et $\bar{\theta}_1$ sont respectivement les solutions θ -libre et θ_1 -libre de (f, f') et si l'on a $\bar{\theta} = \chi \bar{\theta}_1$, alors χ est une dilatation [Car on a $\chi = \gamma \tilde{\circ}$, et si γ n'est pas un isomorphisme, $\bar{\theta}$ n'est pas libre.]

B. Soit donc $\bar{\theta}$ la solution θ -libre correspondant à $\theta \in \Phi(t^*)$. En vertu de la PROPOSITION 1.1.9., une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $\bar{\theta} = \tilde{\circ} \bar{\theta}_0$, où $\tilde{\circ} : \bar{X}_0^* \rightarrow \bar{X}_0^*$ est une dilatation et $\bar{\theta}_0$ une solution principale, est que l'ensemble $\delta \bar{X}_0$ soit formé par les classes de transitivité pour la fermeture de la relation définie sur $\bar{X}_0$ par l'ensemble :

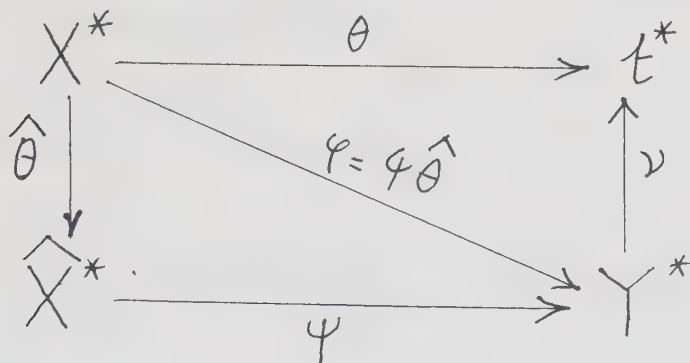
$$\{(z, z') \in \bar{X}_0 \times \bar{X}_0 : zz' \in \mathcal{D}(\bar{g}) \setminus \mathcal{D}_F(\bar{g})\}.$$

C. Soit maintenant $\varphi : X^* \rightarrow Y^*$ une solution de (f, f') dans Y^* telle que $\theta = \nu \varphi$. En vertu de la PROPOSITION 1.1.3., on a $\varphi = \gamma \bar{\theta}_1$, $\theta_1 \in \Phi(t^*)$, avec γ littéral, ce qui implique l'existence d'un morphisme τ tel que

$\theta = \tau \bar{\theta}_1$. Donc $\tau^\# \bar{\theta}_1$ procède de $\bar{\theta}$ au moyen d'un isomorphisme. En vertu de B. on a d'abord $\bar{\theta}_1 = \delta_1 \bar{\theta}'_0$, où δ_1 est une dilatation et $\bar{\theta}'_0$ principale; mais on a aussi $\tau^\# \bar{\theta}_1 = \delta \bar{\theta}_0$. On en déduit $\delta \bar{\theta}_0 = \tau^\# \delta_1 \bar{\theta}'_0$. En vertu de l'unicité de la solution principale on en conclut que l'on a $\bar{\theta}_1 = \delta_1 \bar{\theta}_0$ et $\varphi = \gamma \delta_1 \bar{\theta}_0 = \psi \bar{\theta}_0$.

D. Ce qui précède détermine aux isomorphismes près un assortiment $(\hat{X}, \hat{\theta})$ vérifiant les deux conditions de l'énoncé. On prendra $\hat{X}$ tel que $\text{Card } \hat{X} = \text{Card } \bar{X}_{\bar{\theta}}$ et un isomorphisme $\varepsilon : \bar{X}_{\bar{\theta}}^* \rightarrow \hat{X}^*$.

E. Le théorème obtenu justifie le diagramme :



1.1.11. COROLLAIRE I. Toute solution procède d'une solution principale.

COROLLAIRE II. Si p est le plus grand diviseur commun aux entiers θx , $x \in X$ et si θ' est défini par les valeurs $\theta' x = \frac{1}{p} \theta x$ pour tout $x \in X$, alors les solutions principales correspondantes sont les mêmes : $\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}'_0$.

1.1.12. DÉFINITIONS. Etant donné une équation

$(f, f') \in X^* \times X^*$ nous définissons t' entier :

$$\text{par}(f, f') = \text{Max} \{ \text{Card } \bar{X}_{\bar{\theta}} : \bar{\theta} \text{ principale} \};$$

et, pour X minimal, t' entier :

$\text{def}(f, f') = -1 + \min \text{Card } X - \text{par}(f, f')$,
que nous appelons le défaut de l'équation.

1.1.13. THÉOREME. Soit, sur X minimal, l'équation $(f, f') \in X^* \times X^*$. On a $\text{par}(f, f') < \min \text{Card } X$ si et seulement si l'équation est propre (c'est à dire $f \neq f'$). Autrement dit le défaut est non négatif si et seulement si l'équation est propre.

Preuve. - De la définition de $\text{par}(f, f')$ résulte :
$$\text{par}(f, f') = \text{Max} \left\{ \min \text{Card} \{ \theta^q(x, 1) : x \in X \} : \theta \text{ principale} \right\}.$$

Il y a au moins deux initiales de X_0 dans la même classe si et seulement si (f, f') est propre, d'où la conclusion pour $\text{par}(f, f')$. La suite en résulte immédiatement.

Remarque. - Il existe des équations propres et de défaut nul.

Il suffit en effet de prendre, pour (f, f') , $f = x_1$ et $f' \in X_1^*$, $X_1 = X \setminus \{x_1\}$.

1.2. Equations équilibrées.

1.2.1. Problème aux frontières. Nous appelons problème aux frontières, en abrégé (PF), relatif à un couple de mots $f, f' \in X^*$ abéliennement équivalents le problème suivant :

Déterminer un ensemble C et un morphisme $\omega: X \rightarrow (C \times C)^*$ tels que, posant $\omega f^{(i)} = c_1^{(i)} c_2^{(i)}$, $\omega f'^{(i)} = c_1'^{(i)} c_2'^{(i)}$, soient réalisées les trois conditions suivantes :

(1) les mots :

$$h = (c_2^{(1)} c_1^{(1)}) (c_2^{(2)} c_1^{(2)}) \dots (c_2^{(i-1)} c_1^{(i-1)}) \dots (c_2^{(-1+|f|)} c_1^{(-1+|f|)}),$$

$$h' = (c_2'^{(1)} c_1'^{(1)}) (c_2'^{(2)} c_1'^{(2)}) \dots (c_2'^{(i-1)} c_1'^{(i-1)}) \dots (c_2'^{(-1+|f|)} c_1'^{(-1+|f|)}),$$

soient dans la même classe abélienne pour $(C \times C)^*$;

(2) $c_1^{(1)} = c_1'^{(1)}$ et $c_2^{(|f|)} = c_2'^{(|f|)}$;

(3) tout $c \in C$ est obtenu au moins une fois comme $c_1^{(i)}$ et au moins une fois comme $c_2^{(j)}$.

1.2.2. THÉORÈME. Les mots $f, f' \in X^*$ étant abéliennement équivalents, toute solution principale $\bar{\theta}$ de l'équation (f, f') — qui sera dite équilibrée — donne une solution du problème aux frontières, en prenant $C = \overline{X_{\bar{\theta}}}$ et en prenant pour $c_1^{(i)}$ (resp. $c_2^{(i)}$) l'initiale (resp. l'ultime) de $\bar{\theta} f^{(i)}$.

Preuve. — La condition (2) est vérifiée de manière évidente.

La condition (3) est vérifiée du fait que $\bar{\theta}$ est principale.

La condition (1) est vérifiée en vertu de la proposition ci-après.

1.2.3. PROPOSITION. Soit $\varphi: X^* \rightarrow Y^*$ une solution de l'équation équilibrée et soit Δ_i le digramme, $\Delta_i \in (\varphi X)^2$, obtenu en prenant la dernière lettre de $\varphi f^{(i)}$ et en la faisant suivre de la première lettre de $\varphi f^{(i+1)}$ (et notation analogue pour f'); alors les deux mots $\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_{-1+|f|}$ et $\Delta'_1 \Delta'_2 \dots \Delta'_{-1+|f'|}$ sont abéliennement équivalents sur $(\varphi X \times \varphi X)^*$.

Preuve. — On a d'une part $\varphi f = \varphi f'$. D'autre part, l'équation étant équilibrée, il existe au moins une bijection de l'ensemble des occurrences des x_i dans f sur celui des occurrences des x_i dans f' . Cette bijection se prolonge en une bijection des occurrences intérieures des digrammes. Ces deux faits entraînent la conclusion annoncée pour les deux ensembles d'occurrences frontalières.

1.2.4. COROLLAIRE. Soit (f, f') une équation équilibrée. L'indice frontalière du couple f, f' , c'est à dire l'entier défini par:

$$i_{\text{pro}}(f, f') = \text{Max} \left\{ \underset{\text{min}}{\text{Card } C} : \langle w, C \rangle \text{ solution de (PF)} \right\},$$

vérifie l'inégalité:

$$\text{par}(f, f') \leq i_{\text{pro}}(f, f').$$

2. Systèmes de bimots.

2. Systèmes de bimots.

Les opérations définies dans le présent chapitre trouvent leur origine dans le "Lemme des quatre mots" de F.W. LEVI [6]. Suivant la formulation de l'Auteur :

soit quatre mots $a, b, c, d \in X^*$ tels que $ab = cd$, alors

- 1) si $|a| > |c|$, il existe dans X^* un mot unique f tel que $a = cf$ et $d = fb$;
- 2) si $|a| = |c|$, alors $a = c$ et $b = d$;
- 3) si $|a| < |c|$, il existe dans X^* un mot unique f tel que $af = c$ et $b = fd$.

Dans la perspective qui est la nôtre, nous dirions que l'équation (ab, cd) est telle que $\text{par}(ab, cd) = 3$ et que si l'on prend $W = \{u, v, w\}$, toutes les solutions principales sont données par l'une ou l'autre des lois :

$a = uv$; $b = w$; $c = u$; $d = vw$;
ou $a = u$; $b = vw$; $c = uv$; $d = w$.

2.1. μ -opérations.

2.1.1. TERMINOLOGIE. X étant un ensemble, X^* le monoïde libre de base X , e le mot neutre de X^* ;

a) un couple rangé $(f, f') \in X^* \times X^*$ est un bimot, lequel est plein si et seulement si aucun de ses membres f, f' n'est égal à e ;

- b) le bimot (g, g') [resp. (h, h')] est dit bifacteur gauche [resp. droit] de (f, f') si et seulement si l'on a $(f, f') = (gh, g'h')$; un bifacteur est propre si et seulement s'il est plein;
- c) un bimot est équilibré si et seulement si ses membres sont abéliennement équivalents;
- d) un bimot sera dit primaire à gauche (resp. droite) si et seulement s'il n'admet aucun bifacteur gauche (resp. droit) qui soit à la fois équilibré et plein;
- e) un bimot sera dit indécomposable si et seulement s'il est primaire à gauche ET à droite, décomposable dans le cas contraire.

2.1.2. DÉFINITIONS. a) Soit (f, f') un bimot tel que $f^{(1)} \neq f'^{(1)}$. Nous appelons morphisme de pivot initial gauche et désignons par π_{ig} le morphisme $\pi_{ig}: X^* \rightarrow X^*$ tel que :

$$\begin{aligned} \text{pour } x = f^{(1)}, \quad \pi_{ig} f^{(1)} &= f'^{(1)} f^{(1)}; \\ \dots \quad x \neq f^{(1)}, \quad \pi_{ig} x &= x. \end{aligned}$$

Nous appelons morphisme de pivot initial droit et désignons par π_{id} le morphisme $\pi_{id}: X^* \rightarrow X^*$ tel que :

$$\begin{aligned} \text{pour } x = f'^{(1)}, \quad \pi_{id} f'^{(1)} &= f^{(1)} f'^{(1)}; \\ \dots \quad x \neq f'^{(1)}, \quad \pi_{id} x &= x. \end{aligned}$$

Pour $f^{(1)} \neq f'^{(1)}$, nous définissons de manière analogue les morphismes de pivot ultime gauche π_{ug} et droit π_{ud} .

b) Soit (f, f') un bimot tel que $f^{(1)} \neq f'^{(1)}$. En simplifiant les mots $\pi_{ig} f$, $\pi_{ig} f'$ par leur initiale commune $f'^{(1)}$, on obtient deux mots g et g' . Nous

disons que l'on passe de (f, f') à (g, g') par l'opération de pivot initial gauche, en bref opération pig. Posant $f = f^{(1)} f_1$, $f' = f'^{(1)} f'_1$, on a donc :

$$\text{pig}(f, f') = (f^{(1)} \pi_{ig} f_1, \pi_{ig} f'_1).$$

Nous définissons de façon analogue l'opération de pivot initial droit, soit pid, et si les dernières sont différentes, les opérations de pivot ultime, gauche pu et droit pu.

Ces quatre opérations unaires seront nommées les p-opérations ; elles se répartissent en deux pi-opérations et deux pu-opérations.

c) Nous disons que le bimot (f, f') est pi-transformable (resp. pu-transformable) si et seulement si $f^{(1)} \neq f'^{(1)}$ (resp. $f^{(1f)} \neq f'^{(1f)}$), et pp-transformable si et seulement s'il est à la fois pi et pu-transformable.

Par convention, si (f, f') n'est pas plein, nous posons $p(f, f') = (f, f')$ quelle que soit la p-opération p .

2.1.3. LEMME. Soit B_X^{pi} , B_X^{pu} , B_X^{pp} les parties de $X^* \times X^*$ formées par les bimots pi-transformables, pu-transformables, pp-transformables. Chacun de ces ensembles est stable pour les opérations qui le concernent.

Preuve. - 1. Si aucun des mots n'est monogramme, on a, pour un bimot pi-transformable :

$$(f, f') = (x t m, y z p) ; x, t, y, z \in X ; m, p \in X^* ; x \neq y.$$

1.1. Si $x \neq z$, $(\pi_{ig} f, \pi_{ig} f') = (y x \pi_{ig} t m, y z \pi_{ig} p) ;$
d'où :

$$\text{pig}(f, f') = (x \pi_{ig} t m, z \pi_{ig} p).$$

Résultat analogue pour pid .

1.2. Si $x = z$, on a :

$$(f, f') = (x t m, y x p) ; x \neq y.$$

$$(\pi_{ig} f, \pi_{ig} f') = (y x \pi_{ig} t m, y y x \pi_{ig} p) ;$$

$$\text{pig}(f, f') = (x \pi_{ig} t m, y x \pi_{ig} p).$$

Résultat analogue pour pid .

2. Si un mot, soit f' , est monogramme :

$$(f, f') = (x m, y) ; x \neq y.$$

$$\text{On obtient } \text{pig}(f, f') = (m, e).$$

Le cas de pid relève du point 1.

2.1.4. LEMME. Etant donné (g, g') , il existe un bimot unique (f, f') tel que $\text{pig}(f, f') = (g, g')$ si et seulement si la lettre $g^{(1)} = u$ ou bien n'admet que cette occurrence, ou bien ne figure que par l'intermédiaire d'un digramme fixe vu ($v \neq u$).

Preuve. Soit $(g, g') = (u g_1, g_1^{(1)} g'_1) ; u \neq g_1^{(1)}.$

Il s'agit de déterminer $(f, f') = (f_1^{(1)} f_1, f_1^{(1)} f'_1) ; f_1^{(1)} \neq f_1^{(1)'} ;$ tel que :

$$f_1^{(1)} \pi_{ig} f_1 = u g_1 ; \pi_{ig} f_1' = g_1'.$$

Si, et seulement si, (g, g') est de la forme décrite par l'énoncé, on a $f_1^{(1)} = v$, f et f' sont déterminés de façon unique et s'obtiennent en contractant chaque occurrence du digramme vu en sa finale u , dans g_1 et g_1' . On est alors autorisé à écrire $(f, f') = \text{pig}^{-1}(g, g')$.
Remarque : chaque opération donne lieu à un énoncé analogue.

2.2. Systèmes.

2.2.1. DÉFINITIONS. B étant une partie de l'ensemble B_X^{pi} des bimots pi -transformables, nous considérons les systèmes algébriques $\langle B; \text{pig}, \text{pid} \rangle$ et $\langle B; \text{pig}, \text{pid}, \text{pig}^{-1}, \text{pid}^{-1} \rangle$ ayant comme support B et comme opérations, les opérations unaires indiquées. Parmi les systèmes de ce type, nous aurons à considérer principalement ceux où le support est l'ensemble $\text{Pi}(f, f')$ [resp. $\text{PI}(f, f')$] contenant le bimot (f, f') et fermé pour les pi -opérations [resp. les pi -opérations et leurs inverses].

On définit de la même façon des systèmes munis des pu -opérations, voire de toutes les p -opérations.

Remarque. Il est clair que $\text{Pi}(f, f') \subseteq \text{PI}(f, f')$. Mais l'inclusion peut être stricte comme il est aisé de le voir sur l'exemple $(f, f') = (x t y y x t y, t t y x y x y)$. En effet, eu égard aux degrés des lettres, les opérations pi ne peuvent qu'augmenter les longueurs, alors que l'on a $\text{pig}^{-1}(f, f') = (x t y x t y, y t t x x y)$.

2.2.2. Automates associés. Enroulement. Un système de bimots peut être considéré comme un automate dont les états sont les bimots et dont les changements d'états sont liés aux p -opérations.

Etant donné le système $\langle \text{Pi}(f, f'); \text{pig}, \text{pid} \rangle$, nous prendrons comme état initial l'état (f, f') et comme fonction de transition :

$$\begin{aligned} (g, g'), g'^{(1)} g^{(1)} &\longrightarrow \text{pig}(g, g'); \\ (g, g'), g^{(1)} g'^{(1)} &\longrightarrow \text{pid}(g, g'); \end{aligned}$$

l'alphabet de l'automate étant X^2 .

On peut remarquer à ce sujet que le concept de π -opération que nous avons présenté définit en fait un schéma d'opération lequel, s'appliquant à un bimot particulier, définit une π -opération particulière.

Or la fonction de transition choisie caractérise univoquement l'opération particulière en cause, et détermine donc aussi son inverse.

Soit alors $\Omega = \{\omega_{ij} : 1 \leq i, j \leq \text{Card } X\}$ un ensemble en bijection canonique, $\omega_{ij} \longleftrightarrow x_i x_j$ avec X^2 . Si $g^{(1)} g^{(1)} = \omega_{ij}$ (resp. $g^{(1)} g^{(1)} = \omega_{ji}$), nous considérons ω_{ij} (resp. ω_{ji}) comme l'opérateur qui fait remonter de $\pi(g, g')$ [resp. $\pi(g, g')$] à (g, g') :

$$(g, g')_{\sim} = \omega_{ij} (\pi(g, g')) .$$

D'autre part, $\tilde{\Omega} = \{\tilde{\omega}_{ij}\}$ étant un ensemble analogue, nous considérons $\tilde{\omega}_{ij}$ comme un opérateur qui fait passer de $\pi(g, g')$ au bimot parenthésé:

$$\{ (g^{(1)} g^{(1)}) \pi_{ig} g_1, g_1^{(1)} \pi_{ig} g_1^{(1)} \} ,$$

où toutes les occurrences du digramme $g^{(1)} g^{(1)}$ ont été entourées de parenthèses.

EXEMPLE. De $(g_1, g_1) = (u v w x u y, t z x u x u)$, on passe à:

$$((x u) v w (x u) y, x t z (x u) (x u))$$

Dans ces conditions, si le passage du bimot (g, g') au bimot (h, h') dans des conditions déterminées est caractérisé par le mot $M(g, g'; h, h') \in (X^2)^*$ et si les mots $\mathcal{M} \in \Omega^*$, $\tilde{\mathcal{M}} \in \tilde{\Omega}^*$ correspondent au mot M , on a $(g, g')_{\sim} = \mathcal{M} \cdot (h, h')$ et le bimot parenthésé $\{g, g'\} = \tilde{\mathcal{M}}(h, h')$ se projette sur (g, g')

si l'on garde dans chaque système de parenthèses l'occurrence la plus à droite.

Nous dirons que $\tilde{\Omega}$ est formé par les opérateurs d'enroulement et que $\{g, g'\}$ est un enroulement de (h, h') .

2.2.3. PROPOSITION. Soit (h, h') un bimot qui provient du bimot (g, g') par la dérivation que caractérise le mot $M \in (X^2)^*$ et soit $\varphi: X^* \rightarrow Y^*$ une solution de (h, h') . On obtient une solution $\varphi': X^* \rightarrow Y^*$ de (g, g') en formant l'enroulement correspondant $\{g, g'\} = \tilde{\Omega}(h, h')$, en y remplaçant chaque $x \in X$ par φx et en prenant pour φx le transformé du mot parenthésé qui admet x comme dernière lettre.

Preuve. — Découle immédiatement de la définition de l'enroulement.

2.2.4. Morphismes de systèmes. Il sera commode de distinguer entre les morphismes selon la façon dont les μ -opérations se correspondent.

Pour un morphisme de SI On dira que μ est :

μ i-systèmes, $\mu: S_1 \rightarrow S_2$;

$$\mu g_1 \rightarrow \mu g_2$$

ii - simple

$$\mu id_1 \rightarrow \mu id_2$$

$$\mu g_1 \rightarrow \mu id_2$$

ii - croisé

$$\mu id_1 \rightarrow \mu g_2$$

pour un morphisme d'un μ i-système vers un μ u-système ;

$$\mu g_1 \rightarrow \mu g_1$$

iu - simple

$$\mu id_1 \rightarrow \mu id_1$$

etc...

EXEMPLES d'isomorphismes canoniques.

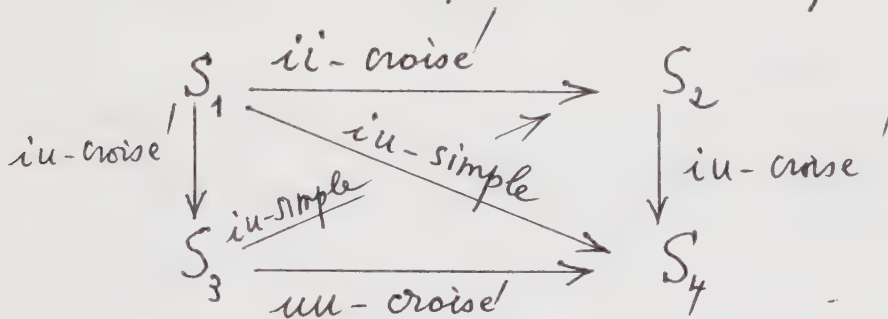
Soit $S_1 = \langle \text{Pi}(f, f') ; \text{pig}, \text{pid} \rangle ;$

$S_2 = \langle \text{Pi}(f', f) ; \text{pig}, \text{pid} \rangle$ inverse' de $S_1 ;$

$S_3 = \langle \text{Pi}(\tilde{f}', \tilde{f}) ; \text{pug}, \text{pud} \rangle$ croisé' de $S_1 ;$

$S_4 = \langle \text{Pu}(\tilde{f}, \tilde{f}') ; \text{pug}, \text{pud} \rangle$ inverse' croisé de $S_1 .$

on a les isomorphismes canoniques :



2.3. Bimots indécomposables.

Le fait, pour un bimot, d'être décomposable ou indécomposable, est capital quant à l'équation associée. Les propositions suivantes font apparaître une difficulté inhérente au sujet.

2.3.1. PROPOSITION. Il existe des bimots (f, f') tels que tous leurs dérivés par pig soient distincts et indécomposables.

Preuve. Soit le bimot $(abccddeab, cadbbdeac) ;$ par applications itérées de pig , on obtient :

$(abccddeab, cadbbdeac)$

qui est indécomposable en vertu de la disposition des occurrences de b .

2.3.2. PROPOSITION. Il existe des bimots (f, f') tels que $\{P_i(f, f')\}$ contienne une infinité de bimots distincts indecomposables dont la formation utilise en un nombre non borné de fois chacune des opérations π_{ig} et π_{id} .

Preuve. - Soit par exemple le bimot 'équilibré' :

$(abc d d e a a bc, d b a e c b c d a a)$.

On applique alternativement la puissance de π_{ig} et la puissance de π_{id} qui utilisent le segment maximal.

1. $d \rightarrow abcd$, donne :

$(abcd abcd e a a bc, d b a e c b c a b c d a)$.

2. $a \rightarrow dba$, donne :

$abcd dba bcde dba dba bc,$
 $, dbaec bc dba bcd dba dba .$

etc.

Le membre de droite commence toujours par $dbaec bc$; le membre de gauche contient son occurrence de e avec un certain ordinal, le facteur droit après cet ordinal et le facteur droit de même longueur dans le second membre conservent une différence constante pour leurs occurrences de b .

2.4. Systèmes linéaires.

2.4.1. DÉFINITION. Nous dirons qu'un bimot $(f, f') \in X^* \times X^*$ est équationnel si et seulement s'il existe des solutions $\theta: X^* \rightarrow t^*$ pour lesquelles $e \notin \theta X$ (e mot vide).

2.4.2. LEMME. Si un bimot est équationnel mais non équilibré, alors chaque membre contient un hapax (id est : une lettre qui admet dans le bimot une occurrence unique).

Preuve. — La relation exprimant l'égalité des longueurs de f et f' n'est pas identiquement vérifiée puisque (f, f') n'est pas équilibré. Si l'un des membres de cette égalité était vide après simplification, l'autre ne pourrait pas l'être, et par conséquent le bimot ne serait pas équationnel. Après simplification, chaque membre contient donc au moins une longueur, correspondant à un hapax.

2.4.3. DÉFINITION. Nous définissons une application λ de l'ensemble des bimots π -transformable dans l'ensemble totalement ordonné $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par la loi suivante.

Pour (f, f') posons $f^{(1)} = u$, $f'^{(1)} = u'$; $u \neq u'$ par hypothèse.

- si u ou u' hapax, $\lambda(f, f') = \infty$;
- sinon, soit :

$f = u a u' b$; $f' = u' a' u b'$; $a, b, a', b' \in X^*$;
les occurrences intérieures de u et u' étant celles dont les ordinaux sont minimaux, et

$$\lambda(f, f') = |u a u'| + |u' a u|.$$

2.4.4. LEMME. Soit (f, f') un bimot linéaire et indécomposable. Si $\lambda(f, f') < \infty$, $Pi(f, f')$ contient un bimot (g, g') tel que $\lambda(f, f') < \lambda(g, g')$.

Preuve.— Pour $g \in X^*$, L_g désigne l'ensemble des lettres qui ont au moins une occurrence dans g .

En vertu de l'indécomposabilité et de la linéarité réunies, on voit que $L a \neq L a'$ (notations de la précédente définition). On supposera par exemple :

$$\text{non } L a \leq L a'.$$

(1) Si aucune lettre de a n'appartient à f' , les lettres de a sont des hapax et une transformation pid conduit à un bimot (g, f') avec un hapax $\bar{a}$ l'initiale de g .

(2) Sinon, soit v celle des lettres de a qui figure dans f' avec l'ordinal le plus élevé. On a alors :

$$f = u a_1 v a_2 u' b, \quad f' = u' a' u b'_1 v b'_2.$$

L'hypothèse implique : $L(u a_1 v a_2 u') \leq L(u' a' u b'_1 v)$, donc $L(a_1 a_2) \leq L(a' b'_1)$.

La puissance de l'opération pid qui correspond à la transformation $u' \rightarrow u a_1 u'$, conduit à :

$$(g, g') = (v a_2 u a_1 u' b, u' a' u b'_1 v b'_2).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \lambda(g, g') &= |v a_2 u a_1 u'| + |u' a' u b'_1 v|, \\ &= \lambda(f, f') + |b'_1 v|. \end{aligned}$$

2.4.5. THÉORÈME. Si (f, f') est un bimot indécomposable, équationnel, linéaire mais non bipermutationnel, il existe dans $Pi(f, f')$ un bimot dont un membre admet un hapax $\bar{a}$ l'initiale.

Preuve.— Résulte directement du LEMME précédent, par itération.

2.4.6. COROLLAIRE. Si (f, f') est un bimot indécomposable, équationnel, linéaire mais non bipermutationnel, il existe dans l'ensemble contenant (f, f') et engendré à partir de ce bimot par les π_i et μ_i -opérations, un bimot (g, g') tel que l'on ait :

soit g (resp. g') = $x h$ et g' (resp. g) = $h' y$;
soit g (resp. g') = $x h y$;
 x et y étant des hapax.

Preuve. — Le théorème précédent admet un dual, avec les μ_i -opérations.

On part de la forme obtenue par le théorème précédent et on applique le théorème dual, qui ne remet pas en cause les initiales.

3. Systèmes équilibrés

3. Systèmes équilibrés.

3.1. Relation π -frontalière.

3.1.1. Remarques préliminaires. Si le bimot π -transformable (f, f') est équilibré, ses transformés par les π -opérations le sont aussi; soit en effet:

$$(f, f') = (f^{(1)} f_1, f'^{(1)} f'_1); \quad f^{(1)} \neq f'^{(1)};$$

d'où:

$$\pi_{ig}(f, f') = (f^{(1)} \pi_{ig} f_1, \pi_{ig} f'_1).$$

Il y a un même nombre d'occurrences, soit μ , de $f^{(1)}$ dans f et f' . Après transformation, le nombre d'occurrences de $f^{(1)}$ reste le même dans chaque membre, celui des occurrences de $f'^{(1)}$ augmente dans chaque membre de $-1 + \mu$. En particulier, si (f, f') est à la fois multilinéaire et équilibré, en bref bipermutationnel, ses dérivés le restent aussi.

Donc si (f, f') est équilibré [resp. bipermutationnel], on peut qualifier d'équilibrés [resp. bipermutationnels] les systèmes $\langle \pi(f, f'); \pi_{ig}, \pi_{id} \rangle$ et $\langle \pi(f, f'); \pi_{ig}, \pi_{id}, \pi_{ig}^1, \pi_{id}^1 \rangle$.

3.1.2. DÉFINITIONS. a) A l'ensemble X nous associons deux ensembles de même cardinalité ${}^{-}X$ et ${}^{+}X$ en bijection canonique avec X .

b) A tout bimot équilibré $(f, f') \in X^* \times X^*$, nous associons deux alphabets :

${}^{-}\mathcal{A}(f, f') = {}^{-}\mathcal{A}$, qui provient de ${}^{-}X$ par identification de ${}^{-}f^{(1)}$ et ${}^{-}f'^{(1)}$;

${}^{+}\mathcal{A}(f, f') = {}^{+}\mathcal{A}$, qui provient de ${}^{+}X$ par identification de ${}^{+}f^{(r)}$ et ${}^{+}f'^{(r)}$; $r = |f| = |f'|$.

c) Dans l'ensemble ${}^{+}\mathcal{A} \times {}^{-}\mathcal{A}$, nous définissons le sous-ensemble ou relation frontalière droite ${}^{+}\tau_D$

$$\tau_D = \{[{}^{+}f^{(1)}, {}^{-}f'^{(2)}], \dots, [{}^{+}f'^{(i)}, {}^{-}f'^{(i+1)}], \dots, [{}^{+}f'^{(r-1)}, {}^{-}f'^{(r)}]\}$$

et dans l'ensemble ${}^{-}\mathcal{A} \times {}^{+}\mathcal{A}$ le sous-ensemble ou relation frontalière gauche ${}^{+}\tau_G$

$$\tau_G = \{[{}^{-}f^{(2)}, {}^{+}f^{(1)}], \dots, [{}^{-}f^{(i+1)}, {}^{+}f^{(i)}], \dots, [{}^{-}f^{(r)}, {}^{+}f^{(r-1)}]\}.$$

d) Dans l'ensemble ${}^{+}\mathcal{A} \times {}^{+}\mathcal{A}$, nous définissons la relation pi-frontalière $\sigma(f, f') = \sigma$ attachée au bimot (f, f') par :

$$\sigma = \tau_D \tau_G.$$

3.1.3. PROPOSITION. Si le bimot (g, g') appartient à $P_i(f, f')$, le bimot (f, f') étant équilibré, alors la relation pi-frontalière de (g, g') contient celle de (f, f') .

Preuve. — Soit $f = xua$, $f' = yvb$; $x, y, u, v \in X$, $a, b \in X^*$; $x \neq y$.

L'alphabet $\mathcal{A}$ est commun aux bimots de l'ensemble $P_i(f, f')$ car les ultîmes restent fixes ;

${}^{+}$ les vocables "gauche" et "droite" se réfèrent toujours aux membres.

par contre, $\bar{\mathcal{A}}$ peut changer d'un bimot à l'autre.

Il suffit de vérifier que tout couple élément de $\sigma(f, f')$ est conservé après une π -opération.

Il y a lieu de considérer les occurrences intérieures de x et de y , puis ce qui concerne la disparition sous l'effet de π_{ig} (resp. π_{id}) du digramme initial à droite yv (resp. à gauche xu).

1. Soit wx un digramme de a , tx un digramme de b . Il existe un enchaînement $+t-x, -x+w$. L'opération π_{ig} fait apparaître wyx dans a , tyx dans b , et l'enchaînement $+t-y, -y+w$ remplace l'ancien et il y a conservation de $(+t, +w)$.

2. Soit ry un digramme de a , tx un digramme de b . Après l'opération π_{ig} , il apparaît l'enchaînement $+t-y, -y+r$. Mais auparavant on avait dans $\bar{\mathcal{A}}$ l'égalité $-x = -y$, d'où l'enchaînement $+t-x, -y+r$. C'est ce $(+t, +r)$ qui est conservé.

Les points 1. et 2. épuisent la question des digrammes intérieurs et valent pour π_{id} mutatis mutandis.

3. Soit vp un digramme de a ; on avait l'enchaînement $+y-v, -v+p$. L'opération π_{ig} fait disparaître le digramme initial yv , mais il apparaît yx . Dans le nouvel $\bar{\mathcal{A}}$ on a $-x = -v$, d'où l'enchaînement $+y-x, -v+p$: conservation.

4. Soit tu un digramme de b . On a l'enchaînement $+t-u, -u+x$. L'opération π_{id} fait disparaître xu mais apparaître xy , à gauche. Dans le nouvel $\bar{\mathcal{A}}$, on a $-u = -y$, d'où l'enchaînement $+t\bar{u}, -y+x$: conservation.

Remarque. Dans le cas non bipermutationnel, il peut apparaître, après une π -opération, de nouveaux couples dans la nouvelle relation π -frontalière.

3.1.4. PROPOSITION. Dans le cas où le bimot est bipermutationnel, en bref, pour une bipermutation, la relation π -frontalière $\sigma = \tau_D \tau_G$ équivaut à une substitution s'exerçant sur ${}^+A$.

Cette substitution $\sigma \in G_{+A}$ sera appelée la substitution π -frontalière de la bipermutation.

Preuve. - Dans le cas d'une bipermutation, il est clair que τ_D est une application de ${}^+A$ sur A et τ_G une application de A sur ${}^+A$, d'où $\sigma \in G_{+A}$.

3.1.5. DÉFINITIONS. Nous dirons qu'un bimot (f, f') appartenant à $X^* \times X^*$ est :

- a) réductible en y , $y \in X$, si et seulement s'il existe une lettre $t \in X \setminus \{y\}$ telle que y et x ne figurent dans f et f' que par t l'intermédiaire du digramme yt ;
- b) π -médiatement réductible en y si et seulement si les bimots dérivées de (f, f') par une π -opération sont réductibles en y ;
- c) π -u-médiatement réductible si et seulement si les bimots dérivées de (f, f') par une π -u-opération sont π -médiatement réductibles.

Et les définitions analogues.

3.1.6. PROPOSITION. La substitution π -frontalière σ de la bipermutation (f, f') contient :

- a) le point fixe (y) , $y \neq f^{(r)}$, $r = |f|$, si et seulement si le bimot (f, f') est réductible en y ou π -médiatement

réductible en y ;

b) le point fixe $y = f^{(z)}$, $z = |f|$, si et seulement si le bimot (f, f') est pu ou pi- u -médiatement réductible.

Preuve. — Immédiate.

Exemples: $(abcde, edbca)$; $\sigma = \begin{pmatrix} e \\ a \end{pmatrix} cd \begin{pmatrix} b \end{pmatrix}$.

$(abcde, ebdca)$; $\sigma = \begin{pmatrix} e \\ a \end{pmatrix} (bcd)$.

3.2. Problème aux frontières

3.2.1. PROPOSITION. $\langle C, \omega \rangle$ étant une solution du problème aux frontières pour le bimot équilibré (f, f') , il existe, pour chaque bimot $(g, g') \in PI(f, f')$ une solution $\langle C, \omega_1 \rangle$ de ce problème telle que ω et ω_1 coïncident sur leurs restrictions à ${}^+ \mathcal{O}$.

Preuve. — Soit $f = xa$; $f' = yvb$; $x, y, v \in X$; $x \neq y$; $a, b \in X^*$. L'opération pig revient à remplacer x par yx (ce dernier x étant un "nouvel" x) et à simplifier par y . Posons, pour le nouvel x , $\omega_1^- x = \omega^- v$. S'il apparaît au premier membre des digrammes $+y-x$, autres que celui qui répond, avant la simplification, à $+y-v$, il en apparaît un nombre égal au second membre. D'autre part, les digrammes ci-devant en zx donnent des digrammes en zy ; les autres ne changent pas. On obtient donc une solution de (PF) pour (g, g') en posant :

$$\forall u \in X \setminus \{x\}, \omega_1^- u = \omega^- u; \omega_1^+ u = \omega^+ u.$$

On a, en sens inverse, l'argument analogue pour pig^{-1} .

3.2.2. DÉFINITIONS. Pour (f, f') équilibré, soit $\mathcal{V}$ une application surjective de l'ensemble τ_G sur l'ensemble τ_D (3.1.2); $\mathcal{V}$

défini un sous-ensemble (ou relation) $\overset{+}{I}$ dans $\overset{+}{A} \times \overset{+}{A}$ (resp. $\overset{-}{I}$ dans $\overset{-}{A} \times \overset{-}{A}$). Soit $\overset{+}{I}$ (resp. $\overset{-}{I}$) l'équivalence obtenue par fermeture transitive de $\overset{+}{I}$ dans $\overset{+}{A} \times \overset{+}{A}$ (resp. $\overset{-}{I}$ dans $\overset{-}{A} \times \overset{-}{A}$), nous poserons $\overset{+}{B} = \overset{+}{A} / \overset{+}{I}$ (resp. $\overset{-}{B} = \overset{-}{A} / \overset{-}{I}$).

3.2.3. THÉOREME. $\textcircled{H}$ désignant l'ensemble des bijections de la relation frontalière gauche τ_G sur la relation frontalière droite τ_D , toute solution du problème aux frontières pour le bimot équilibré (f, f') s'obtient en choisissant pour C un ensemble tel que

$$\text{Card } C = \text{Min} \{ \text{Card } \overset{+}{B}, \text{Card } \overset{-}{B} \}$$

et une application ω de $\overset{+}{B} \cup \overset{-}{B}$ dans ou sur C .

Preuve. — Toute solution $\langle C, \omega \rangle$ de (PF) pour (f, f') détermine au moins une bijection $\overset{+}{I}' \in \textcircled{H}$ et l'équivalence par égalité des valeurs de ω^+x (resp. ω^-x) est compatible avec $\overset{+}{I}'$ (resp. $\overset{-}{I}'$) et au moins aussi fine qu'elle.

Et réciproquement, toute application de $\overset{+}{B} \cup \overset{-}{B}$ dans C donne une solution de (PF) pour (f, f') .

On notera que toute solution s'obtient par application sur/dans une partie de C d'une solution pour laquelle ω est surjective.

DÉFINITION. Nous dirons qu'une solution de (PF) est principale si et seulement si l'application de $\overset{+}{B} \cup \overset{-}{B}$ vers C , vérifiant la condition du Théorème précédent, est surjective.

3.2.4. COROLLAIRE. Les notations étant celles du THÉOREME 3.2.3., l'indice frontalière $\text{ifro}(f, f')$ du bimot équilibré (f, f') est donné par la relation :

$$\text{ifro}(f, f') = \text{Max} \left\{ \text{Min} \left[\text{Card } \overset{+}{B}, \text{Card } \overset{-}{B} \right] : \overset{+}{I} \in \textcircled{H} \right\}.$$

Preuve... Découle immédiatement du théorème précédent.

3.2.5. THÉOREME. (f, f') étant une bipermutation et σ sa substitution π -frontalière, l'indice frontalier de (f, f') est donné par:

$$\text{ifro}(f, f') = \text{Max} \left\{ \text{Min} [\mathcal{Z}(\sigma''), \mathcal{Z}(\sigma')] : \sigma = \sigma'' \sigma'; \sigma'', \sigma' \in \mathcal{G}_{+\mathcal{A}} \right\}.$$

où $\mathcal{Z}(\sigma)^+$ désigne le nombre des orbites de σ dans $^+\mathcal{A}$.

Preuve... Dans le cas d'une bipermutation, la surjection $\overline{\mathcal{V}} \in \mathcal{H}$ détermine deux substitutions $\sigma_1 \in \mathcal{G}_{-\mathcal{A}}, \sigma_2 \in \mathcal{G}_{+\mathcal{A}}$, telles que l'on ait $\sigma_2 = \tau_D \sigma_1 \tau_G$. On a donc

$$\sigma_2 = \tau_D \tau_G (\tau_G^{-1} \sigma_1 \tau_G); \text{ d'où } \sigma = \sigma_2 (\tau_G^{-1} \sigma_1^{-1} \tau_G), \text{ et:}$$

$$\sigma = \sigma_2 \sigma_1; \sigma_1 = \tau_G^{-1} \sigma_2^{-1} \tau_G.$$

La proposition résulte alors du fait que les classes de $^+\mathcal{A}$ modulo $\overline{\mathcal{V}}$ et de $^-\mathcal{A}$ modulo $\overline{\mathcal{V}}$ sont ici les orbites de σ_2 et de σ_1 , ce dernier étant dans la même classe de conjugaison que σ_1 .

3.3. Le cas bipermutationnel.

3.3.1. LEMMES. La notation $L(g), g \in X^*$, désigne l'ensemble des éléments de X qui présentent au moins une occurrence dans g et l'on posera toujours

$$|f| = |f'| = \text{Card } X = k.$$

LEMME A. Une bipermutation indécomposable (f, f') peut se mettre de façon unique sous la forme:

$$(g f^{(1)} h, g' f^{(1)} h');$$

de plus:

+ Zykklus.

- 1° $f^{(1)} = f^{(1+\alpha)}$; $f'^{(1)} = f'^{(1+\beta)}$; $\alpha, \beta > 0$;
 2° $g = f^{(1)} g_1$, $g' = f'^{(1)} g'_1$; $g_1, g'_1 \in (X \setminus \{f^{(1)}, f'^{(1)}\})^*$;
 3° $L(g_1) \neq L(g'_1)$.

Enoncé analogue, par dualité, avec $f^{(k)}$ et $f'^{(k)}$.

Preuve. - Immédiate.

LEMME B. Gardant les notations précédentes, on a :

$$\begin{aligned} \text{pig}(f, f') &= (f, g_I' f^{(1)} h') \text{ avec } g_I'^{(j)} = g_1'^{(i)} ; j \equiv i+1 \pmod{\alpha} ; \\ \text{pid}(f, f') &= (g_I f^{(1)} h, f') \text{ avec } g_I^{(j)} = g_1^{(i)} ; j \equiv i+1 \pmod{\beta} ; \\ \text{pig}^\alpha(f, f') &= \text{pid}^\beta(f, f') = (f, f'). \end{aligned}$$

Preuve. - Immédiate.

LEMME C. Pour toute bipermutation π -transformable (f, f') on a $\text{Pi}(f, f') = \text{PI}(f, f')$.

Preuve. - Conséquence immédiate du lemme précédent.

LEMME D. Si la bipermutation (f, f') est indécomposable, $\text{Pi}(f, f')$ contient au moins une bipermutation (g, g') telle que :

$$g^{(1)} = g'^{(k)} \text{ et } g'^{(1)} = g^{(k)}.$$

Preuve. - Ce lemme résulte immédiatement du LEMME 2.4.4.

Nous en donnons néanmoins une autre preuve, qui borne le nombre des étapes.

(1) Soit $f^{(1)} = f^{(n)}$ et $f'^{(k)} = f^{(m)}$.

Si l'on a $n > m$, on passe par les seules opérations pid [LEMME B.] $\tilde{a}(g, f')$, tel que $g^{(1)} = f'^{(k)}$; puis, de ce bimot on passe par les seules opérations pig au bimot [LEMME B.] (g, g') tel que $g^{(1)} = g'^{(k)}$ et $g'^{(1)} = g^{(k)}$.

Il suffit donc de supposer : $f^{(1)} = f^{(m-2)}$; $f'^{(k)} = f^{(m)} (\mathcal{L})$.

- (2) Les conditions (E) impliquent l'existence dans f d'un facteur de la forme $f^{(m+i)} f^{(m-r-s)}$; en effet, s'il n'en était pas ainsi, l'ensemble $\{f^{(\lambda)} : 1 \leq \lambda \leq m-r\}$ serait égal à l'ensemble $\{f^{(\lambda)} : 1 \leq \lambda \leq m-r\}$, en contradiction avec l'indécomposabilité.
- (3) $P_i(f, f')$ comprend une bipermutation $(\check{f}, \check{f}')$ telle que $\check{f}'$ contienne l'un au moins des facteurs de la forme $\check{f}^{(m+\lambda)} \check{f}^{(1)}$, $m+1 \leq m+\lambda \leq k$; il suffit en effet, à partir du résultat de (2), d'appliquer les seules opérations pid jusqu'à avoir $\check{f}^{(1)} = f^{(m-r-s)}$.
- (4) $P_i(f, f')$ comprend une bipermutation $(\hat{f}, \hat{f}')$ telle que l'on ait $\hat{f}'^{(k)} = \hat{f}^{(m)}$ et $\hat{f}'^{(1)} = f^{(l)}$ avec $l > m$; il suffit en effet, à partir du résultat de (3), d'appliquer la seule opération pig jusqu'à avoir $\hat{f}'^{(1)} = \hat{f}^{(l)} (= \check{f}^{(l)})$.
- (5) La proposition résulte alors du fait que l'on est parvenu à la première face de l'alternative prévue en (1).

3.3.2. THÉORÈME. (f, f') étant une bipermutation indécomposable, à toute solution principale $\langle C, \omega \rangle$ du problème aux frontières pour (f, f') correspond au moins une solution principale de l'équation (f, f') , soit χ , telle que l'on ait :

$\chi : X^* \longrightarrow C^*$ et $\omega + x$ égal à l'ultime de χx pour tout $x \in X$

Preuve. — La proposition est vraie pour $k = \text{Card } X = 2$, car pour $(x_1, x_2, x_2, x_1) = (f, f')$, on a $\text{Card } W = \text{ifro}(f, f') = 1$. La démonstration résultera d'une récurrence (constructive) sur $k = \text{Card } X$.

Nous désignerons par Δ_i le digramme $f^{+p(i)} - f^{(i+1)}$ et par Δ'_i le digramme analogue relativement à f' ; le surlignage

désigne l'image par w de l'élément ou digramme souligné.
 $\langle C, w \rangle$ étant une solution principale de (PF), nous posons
 $\mu = \text{Min} \{ i : \bar{\Delta}_1 = \bar{\Delta}'_i \}$.

A. Posant $f'_I = f^{(1)} f^{(2)} \dots f^{(\mu)}$; $f' = f'_I f'_II$;

nous supposons réalisées les deux conditions suivantes :

(A1) $f^{(1)} \notin L(f'_I)$;

(A2) ou bien $f^{(1)} \neq f^{(2)}$ ou bien, si l'on a $f^{(1+i)} = f^{(2+i)}$
 pour $0 \leq i \leq \alpha$; $0 \leq \alpha$, alors on a $\overline{f^{(1+\alpha)}} = \overline{f^{(2+\alpha)}}$.

Sous ces hypothèses, nous cherchons pour l'équation une solution telle que l'on ait $f^{(1)} = f'_I$. Cette substitution faite, et toute simplification possible à gauche, on obtient une équation $(g, g') \in X_1^* \times X_1^*$ avec $X_1 \subset X$; et cette équation admet pour solution principale de (PF) la restriction de $\langle C, w \rangle$ à (g, g') .

B. Si **A.** n'est pas réalisée, on applique le LEMME 3.5.1.D. de façon à obtenir une bipermutation $(\check{f}, \check{f}')$ dans laquelle $\check{f}^{(1)} = \check{f}^{(k)}$.

En vertu de la PROPOSITION 3.2.1., on sait former pour cette bipermutation une solution de (PF) qui satisfait la condition donnée dans l'énoncé du théorème. Si l'on obtient pour $(\check{f}, \check{f}')$ une solution conforme, on obtient par enroulement une solution conforme pour (f, f') .

Notons que (A1) est nécessairement réalisée.

• Si la condition (A2) l'est aussi, on est dans le cas **A.**

•• Il suffit donc de supposer (A2) non réalisée. Revenant par mesure de simplicité à l'écriture (f, f') [pour $(\check{f}, \check{f}')$] on a donc :

$$f = f^{(1)} f^{(2)} f_1 ; f' = f'_I f'_III f^{(1)} \text{ (avec } f'_{II} = f'_{III} f^{(1)}) ; \bar{\Delta}_1 = \bar{\Delta}'_1 .$$

Soit alors f_A et f_B deux éléments distingués et X_1 l'ensemble

$\{f_A, f_B\} \cup (X \setminus \{f^{(2)}\})$. Le morphisme $\delta: X^* \rightarrow X_1^*$ tel que $f^{(2)} \mapsto f_A f_B ; x \neq f^{(2)}, x \mapsto x ;$

transforme (f, f') en $(\hat{f}, \hat{f}')$ sur X_1 (minimal) avec $\text{Card}_{\min} X_1 = 1 + \text{Card}_{\min} X$.

On prolonge $\langle C, \omega \rangle \tilde{a} (\hat{f}, \hat{f}')$ en posant :

$$\omega_{f_A}^- = \omega_{f^{(2)}}^- ; \omega_{f_A}^+ = \omega_{f^{(1)}}^+ ; \omega_{f_B}^- = \omega_{f^{(2)}}^- ; \omega_{f_B}^+ = \omega_{f^{(2)}}^+ .$$

Le morphisme $\rho: X_1^* \rightarrow X_1^*$ tel que :

$$f^{(1)} \mapsto f'_I f_A ; x \neq f^{(1)}, x \mapsto x ;$$

conduit, après simplification, à une équation

$$(g, g') \in X_2^* \times X_2^* ; X_2 = X_1 \setminus \{f^{(1)}\} .$$

Sans élever la cardinalité, on revient à la condition A.

●●● Il est clair que ce procédé permet de construire, en un nombre fini d'étapes, une solution principale vérifiant la condition de l'énoncé.

Remarque. — L'indécomposabilité de (f, f') a été utilisée. On peut démontrer qu'elle est indispensable.

3.3.3. THÉOREME. Si (f, f') est une bipermutation, la substitution pi-frontalière $\sigma = \tau_D \tau_G$ est un invariant pour $\text{Pi}(f, f') = \text{PI}(f, f')$.

Preuve. — Il existe une bipermutation indécomposable (g, g') avec $(f, f') = (gh, gh')$, et le $\text{Pi} (= \text{PI})$ système de (f, f') s'obtient à partir de celui de (g, g') en suffixant h et h' . Le résultat découle alors de la

PROPOSITION 3.1.3. (non perte dans la relation π -frontalière) et du LEMME 3.3.1.B appliqué à (g, g') , qui entraîne la non augmentation.

3.3.4. PROPOSITION. Pour une équation bipermutationnelle et indécomposable, on a :

$$\text{Card } W = \text{ifro}(f, f').$$

Preuve. — Découle immédiatement du THÉORÈME 3.3.2.

3.3.5. REMARQUE. Il résulte immédiatement de la PROPOSITION 3.2.1. que pour toute bipermutation (f, f') $\text{ifro}(f, f')$ est un invariant relativement à $\pi(f, f')$.

4. Déletion - Applications -

4. Délétion. Applications.

4.1. Délétion.

4.1.1. DÉFINITION. Soit A un ensemble fini et soit $E \subsetneq A$. On appellera délétion de E ⁽¹⁾, et l'on désignera par le symbole $\mathcal{S}_E$, l'application du groupe symétrique $\mathcal{G}(A)$ sur le groupe symétrique $\mathcal{G}(A \setminus E)$ envoyant chaque $\sigma \in \mathcal{G}(A)$ sur la substitution $\sigma' \in \mathcal{G}(A \setminus E)$ définie par la condition suivante :

pour chaque $a \in A \setminus E$, $a\sigma' = a\sigma^k$, où k est le plus petit entier positif tel que $a\sigma^k \in A \setminus E$.

Pour $E = A$, on posera $\mathcal{S}_E \sigma = \epsilon$, où $\{\epsilon\} = \mathcal{G}(\emptyset)$.

4.1.2. PROPRIÉTÉS. Cette définition entraîne immédiatement les conséquences suivantes.

I. Si $\sigma' = \mathcal{S}_E \sigma$, les orbites de σ' sont contenues chacune dans une orbite de σ .

II. Si l'on considère, pour $a \in A \setminus E$ le mot $\gamma \in A^*$:

$$\gamma = a \sigma a \sigma^2 \dots a \sigma^{\lambda-1}; \lambda \text{ ordre de } \sigma;$$

et le mot $\gamma' \in (A \setminus E)^*$:

$$\gamma' = a \sigma' a \sigma'^2 \dots a \sigma'^{\lambda'-1}; \lambda' \text{ ordre de } \sigma';$$

(1) latin: deletio = action de détruire, d'effacer.

le mot γ' s'obtient à partir du mot γ par le morphisme d'effacement ⁽¹⁾ de A^* vers $(A \setminus E)^*$ qui envoie $a \in A$ sur a , si $a \in A \setminus E$, sur le mot vide si $a \in E$.

III. Pour $E, E' \subset A$, $E \cap E' = \emptyset$, on a :

$$\mathcal{S}_{E \cup E'} = \mathcal{S}_E \cdot \mathcal{S}_{E'} = \mathcal{S}_{E'} \cdot \mathcal{S}_E.$$

IV. $\mathcal{S}_E \mathcal{G}(A)$ est isomorphe au sous-groupe maximal de $\mathcal{G}(A)$ qui laisse invariant chaque point de E . Par abus de langage, il arrivera que l'on identifie ces deux groupes.

V. Etant donnée une substitution $\sigma \in \mathcal{G}(A)$, à chaque élément $a \in A \setminus E$, associons le cycle :

$$\gamma_a = (a \ a\sigma \dots a\sigma^k)$$

où l'entier k est défini comme plus haut (4.1.1.).

Soit encore Γ le produit des cycles de σ contenant exclusivement des éléments de $A \setminus E$. On a :

$$\mathcal{S}_E \sigma = \Gamma^{-1} \cdot \prod_{a \in A \setminus E} \gamma_a^{-1} \cdot \sigma = \sigma \cdot \Gamma \cdot \prod_{a \in A \setminus E} \gamma_a.$$

En particulier, pour $E = \{i\}$, on peut écrire :

$$\mathcal{S}_E \sigma = (i, i\sigma^{-1}) \sigma = \sigma (i, i\sigma),$$

où $(i, i\sigma)$ désigne la transposition de i et $i\sigma$, si $i \neq i\sigma$, et l'identité sinon.

VI. On a identiquement :

$$\mathcal{S}_E \sigma = (\mathcal{S}_E \sigma^{-1})^{-1}.$$

4.1.3. PROPOSITION. Soit $E = \{i\}$, $i \in A$, et soit $\sigma, \rho \in \mathcal{G}(A)$. On a $\mathcal{S}_E(\sigma\rho) = \mathcal{S}_E \sigma \cdot \mathcal{S}_E \rho$ si, et seulement si i est un point fixe de σ, ρ , ou $\sigma\rho$.

Preuve. - Pour $E = \{i\}$ on a [4.1.2.V] :

(1) d'où le choix du symbole deletur.

$$S_E \sigma = (i, i\sigma^{-1}) \sigma = \sigma (i, i\sigma).$$

La relation $S_E(\sigma\tau) = S_E\sigma \cdot S_E\tau$ est alors équivalente

à: $\sigma\tau (i, i\sigma\tau) = \sigma(i, i\sigma) (i\tau^{-1}, i) \tau$; soit :

$$\sigma(i\tau^{-1}, i\sigma) \tau = \sigma(i, i\sigma) (i\tau^{-1}, i) \tau ; \text{ soit enfin :}$$

$$(i\tau^{-1}, i\sigma) = (i, i\sigma) (i\tau^{-1}, i)$$

Q.E.D.

4.1.4. THÉORÈME. Soit $E = \{i\}$ ou $E = \{i, j\}$, $i \neq j$ et soit $\alpha, \beta, \varphi, \psi \in \mathcal{G}(A)$; $i, j \in A$.

Si E (c'est à dire soit (i) , soit (ij)) est commun aux décompositions de α et β en produit de cycles disjoints et si l'on a $\varphi = \alpha\psi\beta$, on a aussi :

$$S_E\varphi = S_E\alpha \cdot S_E\psi \cdot S_E\beta.$$

Preuve. -- Supposons $i \neq j$. On peut écrire $\alpha = (ij)\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(ij)$, $\beta = (ij)\bar{\beta} = \bar{\beta}(ij)$; $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{G}(A \setminus \{i, j\})$. D'où :

$\varphi = [(i)(j)\bar{\alpha}] (\varepsilon) [(\psi') (\bar{\beta}(i)(j))]$, où ε désigne la substitution neutre et $\psi' = (ij)\psi(ij)$ la conjuguée de ψ par la transposition (ij) .

Posant $S_E\sigma = \bar{\sigma}$ et appliquant deux fois la proposition précédente, on obtient (compte tenu de 4.1.2. III) :

$$\bar{\varphi} = \bar{\alpha} \bar{\psi}' \bar{\beta}.$$

Mais il est clair que la relation $\psi' = (ij)\psi(ij)$ implique $\bar{\psi}' = \bar{\psi}$, puisque l'on passe de ψ à ψ' en échangeant i et j dans l'écriture de ψ en produit de cycles disjoints.

Pour $E = \{i\}$, le résultat découle immédiatement de la PROPOSITION 4.1.3.

4.2. Calcul du Maximin dominant $\text{Card } W$ dans le cas bipermutationnel.

4.2.1. Décompositions diédrales. Soit A un ensemble fini, $\sigma \in \mathcal{G}(A)$, γ l'un des cycles disjoints de σ . Dans le groupe symétrique s'exerçant sur les éléments de γ , considérons le sous-groupe diédral D_γ défini par γ . A chaque $a \in \gamma$ associons la symétrie $\rho \in D_\gamma$ qui conserve a , à chaque couple $(a, a\gamma)$, associons la symétrie $\rho \in D_\gamma$ qui échange a et $a\gamma$.

Par décomposition diédrale de γ , nous entendons tout produit $\alpha\beta = \rho_a \rho_{a\gamma}$ ou $\rho_{a\gamma^{-1}} \rho_a$.

Si l'ordre de γ est impair et égal à $2r+1$, chaque facteur diédral possède un seul point fixe et r cycles:

$$\mathcal{Z}(\alpha) = \mathcal{Z}(\beta) = r.$$

Si l'ordre de γ est pair et égal à $2r$, un facteur diédral possède deux points fixes et $r-1$ cycles, l'autre zéro point fixe et r cycles.

Par décomposition diédrale nous entendons toute décomposition de la forme $\sigma = \prod \alpha^{(i)} \prod \beta^{(i)}, 1 \leq i \leq \mathcal{Z}(\sigma)$ ou $\alpha^{(i)} \beta^{(i)}$ est une décomposition diédrale des cycles $\gamma^{(i)}$ de σ .

Nous dirons enfin qu'une décomposition diédrale $\sigma = \varepsilon \eta$ est équilibrée si et seulement si l'on a:

$$|\mathcal{Z}(\varepsilon) - \mathcal{Z}(\eta)| \leq 1.$$

4.2.2. LEMME. Toute substitution σ admet des décompositions diédrales équilibrées. Pour une

substitution $\sigma \in \mathcal{G}(A)$, $\text{Card } A = n$, et une décomposition équilibrée $\sigma = \varepsilon \eta$, on a :

$$\mathcal{Z}(\varepsilon) + \mathcal{Z}(\eta) = \mathcal{Z}(\sigma) + n.$$

Preuve. - Au cas où σ est paire, la condition d'équilibre implique $\mathcal{Z}(\varepsilon) = \mathcal{Z}(\eta)$. D'autre part, une substitution impaire σ peut s'écrire $\sigma = \sigma' \gamma$, avec σ' paire et γ cycle de longueur paire.

Compte tenu de la définition d'une décomposition diédrale, il suffit donc de vérifier la proposition pour les cycles et pour les produits de deux cycles disjoints de longueur paire.

Pour un cycle, le résultat découle immédiatement des remarques faites en 4.2.1.

Pour deux cycles de longueurs paires $\sigma = \gamma^{(1)} \gamma^{(2)}$, il suffit d'associer convenablement une décomposition où $\alpha^{(1)}$ (resp. $\alpha^{(2)}$) admet zéro et $\beta^{(1)}$ (resp. $\beta^{(2)}$) deux points fixes.

4.2.3. THÉORÈME. L'entier $M(\sigma)$ défini par

$$M(\sigma) = \text{Max} \left\{ \min [\mathcal{Z}(\sigma'), \mathcal{Z}(\sigma'')] : \sigma = \sigma'' \sigma'; \sigma, \sigma' \in \mathcal{G}_n \right\}$$

est égal à la partie entière de $(n + \mathcal{Z}(\sigma)) / 2$.

Preuve. - En vertu du LEMME 4.2.2. il est clair que $M(\sigma)$ est au moins égal au nombre indiqué.

On vérifie directement que pour $n = 1$ et $n = 2$ l'égalité a lieu.

Supposons qu'il n'en aille pas toujours ainsi et soit N l'entier minimal pour lequel il existe $\tau, \tau, \theta \in \mathcal{G}_N$ avec :

$$\sigma = \tau\theta ; \sum(\tau), \sum(\theta) > [(N + \sum(\sigma)) / 2],$$

où les crochets désignent la partie entière.

Puisque l'on a $\sum(\sigma) \geq 1$, τ et θ ont chacune au moins un point fixe.

• Si elles admettent un point fixe commun, soit i , celui-ci l'est aussi pour σ . On en tire, en vertu de la PROPOSITION 4.1.3. (en écrivant $\mathcal{S}_i$ pour $\mathcal{S}_{\{i\}}$):

$$\mathcal{S}_i \sigma = \mathcal{S}_i \tau \cdot \mathcal{S}_i \theta ; \text{ avec } \sum(\mathcal{S}_i \tau), \sum(\mathcal{S}_i \theta) > [(N-1 + \sum(\mathcal{S}_i \sigma)) / 2],$$

ce qui contredit la minimalité de N .

•• Si τ et θ n'ont pas de point fixe commun, soit $i \cdot \tau = i$; $j \cdot \theta = j$; $i \neq j$. Les éléments i, j ne sont pas points fixes pour σ . Utilisant la déletion $\mathcal{S}_E$, $E = \{i, j\}$ et appliquant deux fois la PROPOSITION 4.1.3. (l'une avec τ et i , l'autre avec θ et j), on aboutit à l'inégalité analogue en $N-2$ et l'on contredit encore la minimalité de N .

4.3.1. DÉFINITION. La bipermutation $\mathcal{b}$ définissant les alphabets $\mathcal{A}$ et ${}^+\mathcal{A}$, ainsi que les applications τ_D et τ_G (3.1.2. et 3.1.5.), nous dirons que les substitutions $\sigma_1 \in \mathcal{G}_{-\mathcal{A}}$ et $\sigma_2 \in \mathcal{G}_{+\mathcal{A}}$ sont $\mathcal{b}$ -couplées (cf. 3.2.5.) si et seulement si l'on a :

$$\sigma_2 = \tau_D \sigma_1 \tau_G.$$

Nous écrirons toujours $\sigma = \tau_D \tau_G = \sigma_2 \sigma_1$, avec $\sigma_1 = \tau_G^{-1} \sigma_2^{-1} \tau_G$. Si l'on fixe σ_2 , σ_1 reste donc fixe dans $\text{Pi}(f, f')$, $\mathcal{b} = (f, f')$.

4.3.2. DÉFINITION. $b = (f, f')$ étant une bipermutation, nous appelons substitutions naturellement attachées à b les substitutions $\sigma_{b1} \in \mathcal{G}_{-\alpha}$ et $\sigma_{b2} \in \mathcal{G}_{+\alpha}$ respectivement induites dans ces alphabets par la surjection $\mathcal{V}$ (Cf. 3.2.5.) qui correspond aux applications par égalité des ordinaux : $\bar{f}'^{(i)} \rightarrow \bar{f}^{(i)}; \bar{f}'^{(i)} \rightarrow \bar{f}^{(i)}$.

Propriété. Soit $\varphi \in \mathcal{G}_X$ la substitution $(\bar{f}, \bar{f}')$ définie par la bipermutation. On obtient σ_{b1} à partir de φ en indiquant par "-" et en identifiant $\bar{f}^{(1)}$ avec $\bar{f}'^{(1)}$, remarque analogue pour σ_{b2} .

4.3.3. PROPOSITION. La substitution pi-frontalière σ d'une bipermutation est toujours paire.

Preuve. - On vérifie aisément que la contraction qui fait passer de $(\bar{f}, \bar{f}')$ à σ_{b1} ou σ_{b2} change la parité. Il en résulte que σ_{b2} a même parité que σ_{b1} , donc que $\sigma_{b1} = \tau_G^{-1} \sigma_{b2}^{-1} \tau_G$.

4.3.4. $(k1)$ -bipermutations. Désignant toujours par k la cardinalité de X , nous dirons qu'une bipermutation est une $(k1)$ -bipermutation si et seulement si l'on a $\bar{f}^{(1)} = \bar{f}'^{(k)}$ et $\bar{f}'^{(1)} = \bar{f}^{(k)}$ (Cf. 3.3.1.D.)

Il est loisible dans ce cas d'identifier canoniquement $-\alpha$ et $+\alpha$ et de les représenter conventionnellement par $\alpha = X \setminus \{f^{(1)}\}$.

Cette identification faite, τ_D et τ_G deviennent des cycles de longueur maximale appartenant au groupe symétrique $\mathcal{G}_\alpha$ d'ordre $k-1$.

D'autre part, et toujours dans ce cas, les substitutions naturellement attachées à la bipermutation

sont égales et proviennent de $\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ par déletion de $f^{(1)}$, la transposition $\begin{pmatrix} f^{(1)} & f^{(k)} \end{pmatrix}$ devenant le point fixe $\begin{pmatrix} f^{(k)} \end{pmatrix}$.

4.3.5. PROPOSITION. Pour une $(k1)$ -bipermutation involutive, la substitution pi-frontalière σ est le commutateur de l'involution $\varepsilon = \sigma_{\mathcal{B}1} = \sigma_{\mathcal{B}2}$ naturellement attachée et du cycle maximal τ_G .

Preuve. - Il est clair d'après 4.3.4. que $\sigma_{\mathcal{B}1} = \sigma_{\mathcal{B}2}$ est, dans le présent cas, une involution. La proposition découle directement de la relation $\sigma = \sigma_2 (\tau_G^{-1} \sigma_1^{-1} \tau_G)$ pour $\sigma_2 = \sigma_1 = \varepsilon = \sigma_1^{-1}$.

4.3.6. DÉFINITION. Une bipermutation involutive sera dite parfaite si et seulement si les involutions naturellement attachées à cette bipermutation correspondent à une décomposition diédrale de la substitution pi-frontalière.

Remarque. Des propriétés des involutions naturellement attachées il résulte aussitôt que, si la décomposition est diédrale, elle est diédrale équilibrée.

EXEMPLES. 1° $\mathcal{B} = (abcdefghij, feihbajdcg)$; on obtient, en supprimant les indices "+":

$$\sigma = \begin{pmatrix} j & c & f & d & b & e & h & a & i \\ g \end{pmatrix}; \quad \sigma = \tau_{\mathcal{B}} \sigma_I, \text{ avec}$$

$$\tau_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} j \\ g \end{pmatrix} (ci)(fa)(dh)(be): \text{décomposition parfaite}$$

2° $\mathcal{B} = (abcdefghij, j'dgbi h c f e a)$; on obtient:

$$\sigma = \begin{pmatrix} j' & c & e & i & g \\ a \end{pmatrix} (bh)(df); \quad \sigma = \tau_{\mathcal{B}} \sigma_I, \text{ avec}$$

$$\tau_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} j' \\ a \end{pmatrix} (bd)(gc)(ei)(fh), \text{ facteur non diédral, } \mathcal{B} \text{ n'est pas parfaite.}$$

4.3.7. PROPOSITION. Pour une bipermutation involutive parfaite, les involutions naturellement attachées ont chacune le nombre maximal de cycles $\frac{1}{2}(k-1+\sum(\sigma))$. S'il existe dans $P_i(f, f')$, ayant pour substitution π -frontalière σ , une $(k1)$ -bipermutation involutive, la commutation $\tau_\sigma \varepsilon \sigma = \varepsilon \tau_\sigma$ réalisée, maximise le nombre des cycles de l'involution ε .

Preuve. - Résulte immédiatement de ce qui précède.

La recherche des bipermutations involutives et particulièrement des $(k1)$ -bipermutations involutives apparaît donc comme un problème intéressant. Nous l'aborderons dans la section 7.

*

Avant de clore cette section, nous voudrions signaler que les belles recherches de MM. Alain JACQUES et Claude LENORMAND sur certains points de la théorie des substitutions ont parfois rencontré nos propres travaux, qu'elles n'ont pas manqué de stimuler.

5. Equations linéaires.

5. Equations linéaires.

5.1. Cas non bipermutationnel.

5.1.1. Remarques préliminaires. Il est clair que si une équation linéaire $(f, f') \in X^* \times X^*$ est décomposable, les équations qui en proviennent par décomposition sont indépendantes les unes des autres. Il est clair aussi que toute solution $\varphi': X^* \rightarrow Y^*$ d'une équation de la forme (xg, xg') s'obtient en prolongeant à X une solution $\varphi: (X \setminus \{x\})^* \rightarrow Y^*$, en posant $\varphi'x = h$, h mot (arbitraire) de Y^* .

D'autre part, si un bimot (f, f') n'est pas équationnel (2.4.1.), il existe une partie X_e de X telle que pour toute solution $\theta: X^* \rightarrow t^*$ et pour tout $x \in X_e$ l'on ait $\theta x = e$ (le mot vide). Soit alors $(\bar{f}, \bar{f}')$ le bimot provenant de (f, f') par le morphisme qui envoie sur e les éléments de X_e et sur lui-même chaque élément de $X \setminus X_e$. Il est clair que toute solution φ' de (f, f') s'obtient à partir d'une solution de $(\bar{f}, \bar{f}')$ en prolongeant celle-ci sur X_e par $\varphi'x = e$, $x \in X_e$.

Ces remarques justifient que l'on s'en tienne désormais aux seules équations données sur un alphabet X minimal par un bimot équationnel,

équations que nous appellerons *normalisées*.

5.1.2. PROPOSITION. Chacune des conditions (a) et (b) suivantes est suffisante pour que l'équation (f, f') soit de défaut nul:

(a) $f = xg$ et $f' = g'y$, x et y étant des hapax;

(b) le bimot (f, f') étant équationnel, on a $f' = xgy$, x et y étant des hapax.

Preuve. - (a) Soit $V = X \setminus \{x, y\}$; nous définissons un ensemble $\hat{V}$ en bijection canonique avec V et le morphisme α par $v \in V$, $\alpha v = \hat{v}$. Soit d'autre part w un nouveau symbole et soit enfin $Y = \hat{V} \cup \{w\}$.

On obtient une solution $\varphi: X^* \rightarrow Y^*$ de (f, f') en posant:

$$\text{pour } v \in V, \quad \varphi v = \alpha v = \hat{v};$$

$$\varphi x = \alpha g' w;$$

$$\varphi y = w \alpha g.$$

On a $\text{Card } Y = -1 + \text{Card } X$ et φ est principale en vertu de la PROPOSITION 1.1.9.

(b) En vertu du LEMME 2.4.2., l'hypothèse implique que f contient un hapax z , d'où $f = f_1 z f_2$; $f_1, f_2 \in X^*$.

Soit $V = X \setminus \{x, y, z\}$. On définit comme précédemment un ensemble $\hat{V}$ et le morphisme α . Soit alors w_1 et w_2 deux nouveaux symboles et $Y = \hat{V} \cup \{w_1, w_2\}$. On obtient une solution $\varphi: X^* \rightarrow Y^*$ de l'équation en posant:

$$\text{pour } v \in V, \quad \varphi v = \alpha v = \hat{v};$$

$$\varphi x = \alpha f_1 w_1;$$

$$\varphi y = w_2 \alpha f_2;$$

$$\varphi z = w_1 \alpha g w_2.$$

On achève comme en (a).

5.1.3. THÉORÈME. Toute équation normalisée linéaire et non bipermutationnelle est de défaut nul.

Preuve.— Conséquence immédiate du COROLLAIRE 2.4.6. et de la PROPOSITION 5.1.2. .

5.2. Cas bipermutationnel.

5.2.1. THÉORÈME. Toute équation normalisée linéaire et bipermutationnelle sur un alphabet X est telle que

$$\text{Card } W = \frac{1}{2} \left(Z(\sigma) + \text{Card } X - 1 \right)$$

où $Z(\sigma)$ désigne le nombre des orbites de la substitution π -frontalière σ .

Preuve.— Ce résultat ne se distingue du résultat donné antérieurement que par l'absence du symbole de partie entière. En effet, σ étant paire, $Z(\sigma) + \text{Card } X - 1$ est un entier pair.

6. Types et μ -systemes de types.

6. Types et p -systèmes de types.

6.1. Types.

6.1.1. Complément de terminologie. Nous continuons à désigner par k la cardinalité de l'ensemble fini X et nous représentons par $X!$ l'ensemble des permutations de X .

Pour $(f, f') \in X! \times X!$, nous appelons substitution typique de (f, f') la substitution $\varphi \in \mathcal{G}_k$ définie par :

$$f'(j) = f(\varphi(j)) ; j \in [k] ;$$

et nous appelons type de (f, f') la permutation de $[k]$ définie par :

$$\text{type}(f, f') = \langle \varphi(1) \quad \varphi(2) \quad \dots \quad \varphi(j) \quad \dots \quad \varphi(k) \rangle = \langle \varphi \rangle .$$

Par exemple, pour $X = \{x_i : 1 \leq i \leq 5\}$ et pour $(f, f') = (x_3 x_2 x_1 x_5 x_4, x_5 x_3 x_1 x_4 x_2)$ on a $\text{type}(f, f') = \langle 4 1 3 5 2 \rangle$.

La substitution typique de la bipermutation (f, f') étant φ , on vérifie aisément que celles de ses associées sont respectivement φ^{-1} pour l'inversée, $\gamma \varphi^{-1} \gamma$ pour la retournée et $\gamma \varphi \gamma$ pour la retournée inversée, γ désignant la substitution $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & k \\ k & k-1 & \dots & k+1-j & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Nous dirons que (f, f') est involutive, resp. réversible

resp. inversement réversible si et seulement si $\varphi = \varphi^{-1}$,
resp. $\varphi = \gamma \varphi^{-1} \gamma$, resp. $\varphi = \gamma \varphi \gamma$; il est clair que deux de ces propriétés prises ensemble entraînent la troisième.

Enfin, nous appellerons application typante et nous désignerons par $\boxed{\tau}$ l'application :

$$\boxed{\tau}: X' \times X' \longrightarrow [k]',$$

qui envoie chaque bipermutation sur son type.

6.1.2. Opérations sur les types. Les p -opérations sur les types se définissent à partir des p -opérations sur les bipermutations par application typante et fermeture de diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{b} & \xrightarrow{\boxed{\tau}} & \boxed{\tau} \mathcal{b} \\ \downarrow \mathcal{p} & \boxed{\tau} & \downarrow \mathcal{p} \\ \mathcal{p} \mathcal{b} & \xrightarrow{\boxed{\tau}} & \boxed{\tau} \mathcal{p} \mathcal{b} \\ & & = \mathcal{p} \boxed{\tau} \mathcal{b} \end{array}$$

$$\mathcal{b} = (f, f') ; \mathcal{p} \in \{p_{ig}, p_{id}, p_{ug}, p_{ud}\}.$$

Par abus de langage, nous donnons à l'opération induite le nom de l'opération inductrice.

Les LEMMES 3.3.1. conduisent aux règles opératoires suivantes: $\langle \varphi \rangle$ étant indécomposable, avec :

$$1 = \varphi(1+\alpha) ; \varphi(1) = 1+\beta ; k = \varphi(k-\delta) ; \varphi(k) = k-\delta-1$$

$$p_{ig} \langle \varphi \rangle = \langle \varphi \rangle \cdot (\varphi(1) \ \varphi(2) \ \dots \ \varphi(\alpha)) ;$$

$$p_{id} \langle \varphi \rangle = \langle \varphi \rangle \cdot (\beta \ \beta^{-1} \ \dots \ 1) ;$$

$$p_{ug} \langle \varphi \rangle = \langle \varphi \rangle \cdot (\varphi(k) \ \varphi(k-1) \ \dots \ \varphi(k-\delta)) ;$$

$$p_{ud} \langle \varphi \rangle = \langle \varphi \rangle \cdot (k-\delta \ k-\delta+1 \ \dots \ k).$$

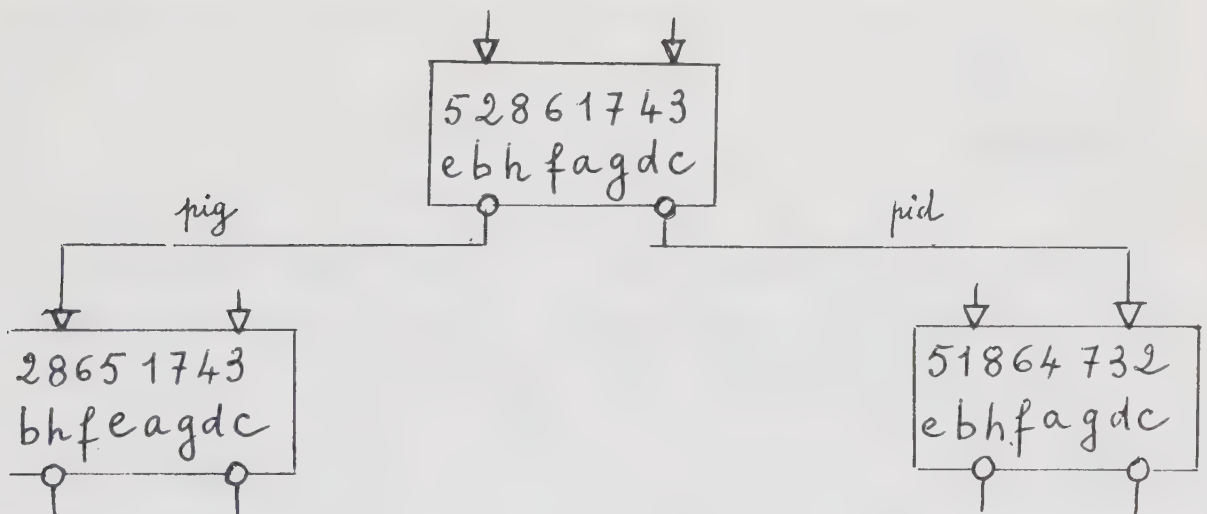
6.1.3. Représentation des bipermutations. D'un point de vue algorithmique, il est expédient de représenter une bipermutation par son second membre et son type. Les calculs peuvent être conduits comme l'indique l'exemple suivant.

$$X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\};$$

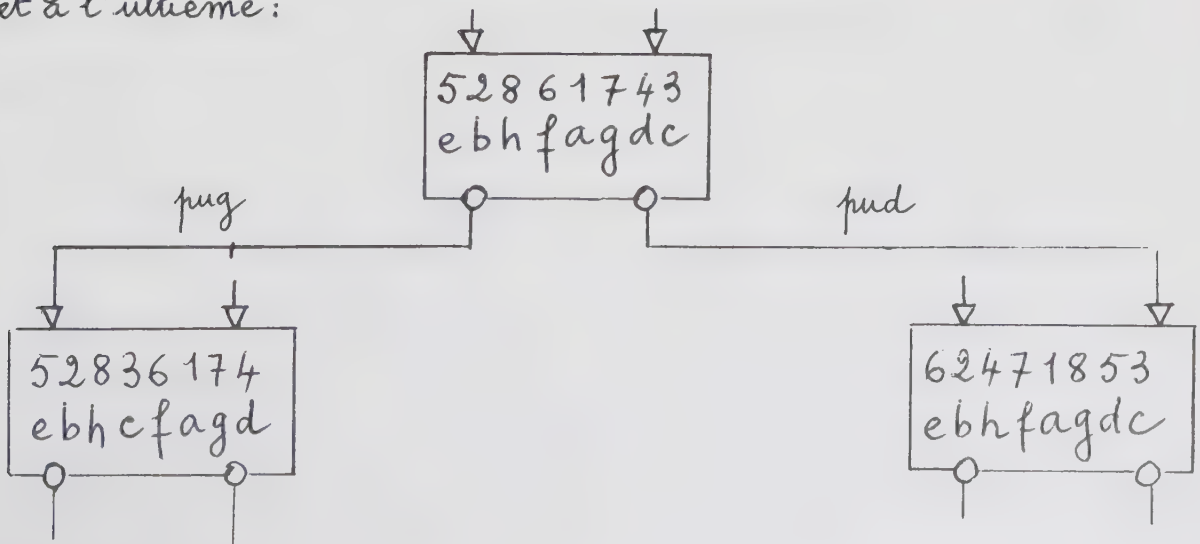
$$b = [a b c d e f g h, e b h f a g d c]$$

On écrit: $b = \begin{matrix} 52861743 \\ e b h f a g d c \end{matrix}$

On calcule à l'initiale: :



et à l'ultime:



6.1.4. Algorithme pour former σ . On vérifie immédiatement que l'on forme le σ de la bipermutation $(1 \ 2 \ \dots \ k, \ \varphi(1) \ \varphi(2) \ \dots \ \varphi(k))$, en posant:

$\tau_G: \bar{j} \longrightarrow {}^+(j-1); \tau_D: {}^+\varphi(i) \longrightarrow \bar{\varphi(i+1)}$; et en identifiant:

$\bar{0}$ avec $\bar{(\varphi(1)-1)}$ et ${}^+k$ avec ${}^+\varphi(k)$.

On a alors, pour ce σ "numérique":

$$\sigma: i \longrightarrow \varphi(i+1) - 1$$

(en omettant les indices). On en déduit immédiatement σ sous la forme d'un produit de cycles disjoints.

EXEMPLE. $\mathcal{L} = 5 \ 2 \ 8 \ 6 \ 1 \ 7 \ 4 \ 3$
 $e \ b \ h \ f \ a \ g \ d \ c$.

On a $8 \vee 3$; 8 donne $6-1=5$; 5 donne $2-1=1$; 1 donne $7-1=6$; 6 donne $1-1=0 \vee 5-1=4$; 4 donne $3-1=2$; 2 donne $8-1=7$; 7 fait retour à $4-1=3 \vee 8$. D'où:

$$\sigma = \left(\begin{array}{cccccc} 8 \vee 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 & 7 \\ h \vee c & e & a & f & d & b & g \end{array} \right).$$

6.2.1. Morphismes de systèmes. Il est clair que l'on peut définir des systèmes de types pour les π -opérations et l'application $[E]$ est un homomorphisme d'un système de bi-permutations sur un système de types. Pour les homomorphismes relatifs aux systèmes de types, nous gardons la terminologie introduite en 2.2.4.

6.2.2. PROPOSITION. Le π -système engendré par un type $\langle \varphi \rangle$ indécomposable
 (1) n'admet pas d'automorphisme simple autre que l'identité;
 (2) admet au plus un automorphisme croisé, à savoir l'inversotypie qui envoie chaque type sur son inverse.

Preuve. - En vertu du LEMME 3.3.1.D., on peut toujours supposer $\langle \varphi \rangle$ tel que $\varphi(1) = k$ et $\varphi(k) = 1$.

$\varphi(i)$ donne la périodicité de πid pour $\pi i g^i \langle \varphi \rangle$, un automorphisme simple ne peut donc envoyer $\langle \varphi \rangle$ que sur lui-même, un automorphisme croisé ne peut l'envoyer que sur le type inverse. Q.E.D.

La question de savoir si l'inversotypie est toujours possible sera tranchée plus tard, par l'affirmative.

6.2.3. PROPOSITION. Le π -système engendré par une bipermutation indécomposable admet pour automorphismes simples les seuls (éventuels) automorphismes qui conservent le type - ou isotypies - et pour automorphismes croisés les seuls (éventuels) automorphismes qui inversent le type - ou inversotypies.

Preuve. - Sinon, en appliquant $[E]$ à un système convenable on contredirait la PROPOSITION 6.2.2.

6.2.4. PROPOSITION. Le $\mathcal{F}$ -système ($\mathcal{F}$ étant $\mathcal{P}$ i ou $\mathcal{P}$ u ou $\mathcal{P}$) engendré par une bipermutation involutive de type ε admet l'inversotypie Inv_{min} donnée par :

$$\text{Inv}_{\text{min}}(g, g') = (g' \cdot \varepsilon, g \cdot \varepsilon).$$

Preuve. — Pour $p \in G_X$ il existe un isomorphisme simple, obtenu par identité des dérivations, entre les $\mathcal{F}$ -systèmes qui engendrent (f, f') d'une part, $(f \cdot p, f' \cdot p)$ d'autre part; appelons-le isomorphisme canonique. D'autre part, la transformation qui envoie tout (g, g') sur (g', g) est, comme nous l'avons noté en 2.2.4., un isomorphisme croisé. Le produit de l'isomorphisme canonique attaché à ε et de l'isomorphisme croisé est un isomorphisme croisé Inv_{min} , défini comme plus haut. Mais, ε étant une involution, on a :

$$\text{Inv}_{\text{min}}(f, f') = (f' \cdot \varepsilon, f \cdot \varepsilon) = (f, f')$$

Inv_{min} est donc un automorphisme croisé; le fait qu'il soit une inversotypie apparaît sans recours à la proposition précédente.

6.3. Types indécomposables.

6.3.1. THÉORÈME. Le nombre des types indécomposables d'ordre n , soit $f(n)$, vérifie la relation de récurrence :

$$n! = f(n) + 1! f(n-1) + \dots + (n-p)! f(p) + \dots + (n-2)! f(2) + (n-1)!$$

avec la condition initiale $f(2) = 1$.

Preuve. — Les types d'ordre 2 étant $\langle 1\ 2 \rangle$ et $\langle 2\ 1 \rangle$, on a d'abord $f(2) = 1$.

Pour qu'un type $\langle \varphi \rangle$ d'ordre n soit décomposable, il faut et il suffit qu'il existe au moins un entier $p < n$

tel que $\{1, \dots, p\} = \{\varphi(1), \dots, \varphi(p)\}$.

A chaque type décomposable, attachons l'entier minimal p possédant la propriété précédente. En vertu de la minimalité de p , le type :

$$\langle \varphi_p \rangle = \langle \varphi(1) \ \varphi(2) \ \dots \ \varphi(p) \rangle$$

est alors un type indécomposable d'ordre p .

Il existe $f(p)$ types de cette espèce, à chacun des quels sont associés $(n-p)!$ types décomposables d'ordre n distincts. Le dénombrement étant complet et sans répétitions, on a :

$$n! - f(n) = (n-1)! + \sum_{p=2}^{n-1} (n-p)! f(p),$$

ce qui établit la proposition.

En posant conventionnellement $f(1) = 1$, on écrit plus symétriquement :

$$f(n) = n! - \sum_{p=1}^{n-1} (n-p)! f(p).$$

Conséquence. Le rapport $g(n) = \frac{f(n)}{n!}$ vérifie l'équation :

$$1 = g(n) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g(i)}{C_n^i}.$$

6.3.2. COROLLAIRE. La série génératrice qui donne le nombre des types indécomposables d'ordre n est :

$$1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n \right)^{-1}.$$

Preuve. - Posant $S(t) = \sum_1^{\infty} f(n) t^n$ et $E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$, on vérifie aisément que :

$$S(t) E(t) = -1 + E(t).$$

6.3.3. Indications numériques. On a pour $2 \leq n \leq 7$:

n	:	2	3	4	5	6	7
types décomposables	:	1	3	11	49	259	1593
types indécomposables	:	1	3	13	71	461	3447
$n!$	:	2	6	24	120	720	5040
$g(n)$	:	0,5	0,5	0,54...	0,59...	0,63...	0,68...

7. π -systemes bipermutationnels
et involutions.

7. π -systèmes bipermutationnels et involutions.

7.1. Systèmes contraints.

7.1.1. Terminologie. Dans cette section, nous considérons exclusivement des π -systèmes $\langle \Pi(f, f'); \pi_{fg}, \pi_{fd} \rangle$ engendrés par quelque bipermutation indécomposable (f, f') , que nous appelons des π -systèmes bipermutationnels minimaux (on abrégé : π -sbm). Les seules opérations utilisées étant les opérations π_{fg} et π_{fd} , nous en abrégeons la désignation en τ_1 et τ_2 , respectivement.

Pour faciliter l'expression, nous introduisons les termes ci-après. Etant donné $b \in X' \times X'$ (X minimal) et une lettre $x \in X$, nous appelons rang (resp. place) de x son ordinal dans f (resp. f') - cela, en liaison avec l'usage systématique de la représentation d'une bipermutation par son type et son second membre.

La relation ${}^+y = {}^-x \cdot \tau_g$ équivaut donc à $\text{rg}(y) = -1 + \text{rg}(x)$, rg désignant le rang. Par abus d'écriture, nous ne mentionnerons pas les indices "+" et "-" lorsque le contexte permet de les rétablir sans ambiguïté (par exemple, lorsqu'il s'agira d'une substitution π -frontalière).

Les lettres éclairées représenteront toujours des systèmes.

7.1.2. DÉFINITION. Soit C une partie de X , formée des lettres dites contraintes. En interdisant toute opération τ_1, τ_2 si qu'une lettre contrainte figure à l'initiale du membre concerné, on obtient sur $X' \times X'$ des systèmes contraints.

Commentaire. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à certains π -systèmes contraints $\mathbb{C} = \mathbb{C}[\mathcal{b}; C]$ engendrés par une bipermutation $\mathcal{b}$ en présence d'un ensemble de lettres contraintes C . Soit $\mathcal{b}'$, notée $\mathcal{S}_C \mathcal{b}$, la bipermutation formée à partir de $\mathcal{b}$ en effaçant les lettres de C . Si $\mathcal{b}'$ est indécomposable sur $X \setminus C$, elle engendre sans contrainte un π -sbm A' . L'opérateur $\mathcal{S}_C$ définit un isomorphisme de $\mathbb{C}$ muni des opérations contraintes sur A' muni des opérations non contraintes.

Il sera commode de dire que $\mathbb{C} = \mathbb{C}[\mathcal{b}, C]$ porte un π -sbm A isomorphe à A' . Si la substitution π -frontalière de $\mathbb{C}$, égale par définition à celle du π -sbm engendré par $\mathcal{b}$ sans contrainte, est désignée par σ , nous désignerons par σ_P celle du système porté.

7.1.3. LEMME. Pour toute bipermutation appartenant au π -système $\mathbb{C}[\mathcal{b}; x]$ engendré par la bipermutation $\mathcal{b}$ avec contrainte sur la lettre x , la lettre y définie par $y = x \cdot \tau_G$ resp. $y = x \cdot \tau_D^{-1}$ est fixe.

Preuve. - En vertu de la dualité, il suffit de considérer $x \cdot \tau_G$.

L'opération τ_1 conserve les rangs. Pour τ_2 :

a) si $\varphi(1) < \text{rg}(x)$, x et y gardent leurs rangs ;

b) si $\varphi(1) > \text{rg}(x)$:

(i) pour $\text{rg}(y) > 1$, x et y voient leurs rangs diminuer chacun d'une unité ;

(ii) pour $\text{rg}(y) = 1$, l'opération τ_2 donne $\text{rg}(x) = 1$ et $\text{rg}(y) = \varphi(1) - 1$. Mais, dans la

bipermutation obtenue, d'une part on a $\varphi(1)-1 \sim 0$, d'autre part la contrainte sur x rend τ_1 inapplicable. La seule opération possible est τ_2 , de sorte que l'équivalence $\varphi(1)-1 \sim 0$ est non ambiguë.

7.1.4. DÉFINITION. Λ étant un π -sbm non réductible, σ sa substitution π -frontalière, $\sigma = \sigma_2 \sigma_1$ une décomposition équilibrée de σ en produit d'involutions pour laquelle $f^{(k)}(\sim f'^{(k)})$ est un point fixe de σ_2 , nous partageons l'ensemble $X \setminus \{f^{(k)}\}$ des lettres à rang variable en:

- a) lettres σ_1 -fixes, à savoir les lettres qui entrent (éventuellement par équivalence dans $f^{(k)}$) dans un point fixe de σ_1 ;
- b) lettres σ_1 -alternantes, à savoir les lettres qui entrent (éventuellement par équivalence) dans une transposition (id est : un cycle de longueur deux) de σ_1 .

Conséquence. $f'^{(k)}$ et $f^{(k)} \cdot \sigma$ sont σ_1 -alternantes pour toute décomposition répondant à la précédente définition. En dehors du cas où le cycle de $f^{(k)}(\sim f'^{(k)})$ est de longueur 3, $f^{(k)} \cdot \sigma^{-1}$ est σ_1 -alternante.

7.1.5. LEMME. Soit Λ un π -sbm non réductible, σ sa substitution π -frontalière, $\sigma = \sigma_2 \sigma_1$ une décomposition diédrale équilibrée pour laquelle $f^{(k)}(\sim f'^{(k)})$ est point fixe de σ_2 , m une lettre à rang variable.

1. Si m est σ_1 -fixe, ou bien σ comprend la transposition $(m \ m \cdot \sigma)$, ou bien $m \cdot \sigma$ et $m \cdot \sigma^{-1}$ sont distinctes et σ_1 -alternantes.

2. Si m est σ_I -alternante, ou bien l'une au moins des lettres $m \cdot \sigma$, $m \cdot \sigma^{-1}$ est σ_I -alternante, ou bien m figure dans un cycle de longueur 4 autre que celui de $f^{(k)} (\sim f'^{(k)})$.

Preuve. — Cette proposition est une conséquence immédiate des DÉFINITIONS 7.1.4. et des propriétés d'une définition d'une décomposition diédrale équilibrée (Cf la démonstration de l'existence d'une telle décomposition).

7.1.6. DÉFINITIONS. a) A étant un π -système bipermutationnel, nous dirons qu'une lettre $x \in X$ est forte dans A si et seulement si A contient une bipermutation où x admet pour rang $k-1$ et pour place, une place plus petite que celle de la lettre de rang 1; dans une telle bipermutation, nous dirons que la lettre en cause est explicitement forte.

b) A étant de plus minimal et non réductible, et de substitution π -frontalière σ , nous dirons qu'une décomposition $\sigma = \sigma_2 \sigma_1$ est adaptée (resp. diédrale adaptée ou en bref d-adaptée) à A si et seulement si elle satisfait les conditions suivantes:

- (i) c'est une décomposition, en produit de deux involutions, qui est équilibrée (resp. diédrale);
- (ii) $f^{(k)} (\sim f'^{(k)})$ est point fixe de σ_2 ;
- (iii) ou bien σ ne contient qu'un cycle, ou bien $\ell(\sigma) > 1$ et il existe un cycle pour lequel un point fixe de σ_1 est une lettre forte.

EXEMPLE. A étant engendré par $\begin{matrix} 987654321 \\ ihgfedcba \end{matrix}$,

on a $\sigma = \begin{pmatrix} i & g & e & c \\ a & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & f & d & b \end{pmatrix}$. On prouve assez aisément que la seule lettre forte est h . La décomposition :

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} i \\ a \end{pmatrix} (gc) (e) (hb) (fd),$$

$$\sigma_I = \begin{pmatrix} i & g \\ a & \end{pmatrix} (c \ e) (h) (bf) (d), \text{ donnant :}$$

$$\sigma_1 = (bh) (df) \begin{pmatrix} i \\ a \end{pmatrix} (cg) (e),$$

est d-adaptée. Au contraire, la décomposition :

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} i \\ a \end{pmatrix} (gc) (e) (fh) (db),$$

$$\sigma_I = \begin{pmatrix} i & g \\ a & \end{pmatrix} (ce) (f) (hd) (b), \text{ donnant :}$$

$$\sigma_1 = (bh) (df) (g) \begin{pmatrix} ie \\ a \end{pmatrix} (c),$$

n'est pas adaptée.

Remarque. Lorsque la lettre forte est explicitement forte, il est possible de lui donner la place 1 par des opérations τ_1 . Dans la bipermutation obtenue, après identification canonique de ${}^{-}\mathcal{A}$ et ${}^{+}\mathcal{A}$, $f^{(k)} \cap f^{(1)}$ est point fixe de σ_1 comme de σ_2 .

7.1.7. LEMME. Une condition suffisante pour qu'une lettre w' soit forte dans A est que A contienne une bipermutation (f, f') dans la quelle on ait :

$$w = w' \sigma^{-1}; f^{(1)} = f^{(k)}; \text{ place } w' < \text{ place } w.$$

Preuve. — w et w' désignant les rangs de w et w' , respectivement, la bipermutation (f, f') est de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} k & \dots & w' & \dots & w & t+w' & \dots \\ f^{(k)} & \dots & w' & \dots & w & t & \dots \end{array}$$

Par des opérations τ_2 , on peut donc attribuer à w' le rang $k-1$, tandis que t prend le rang 1.

7.1.8. LEMME. Pour $\mathcal{Z}(\sigma) > 1$, tout cycle de σ autre que celui de $f^{(k)}(\nu f^{(k)})$ contient au moins une lettre forte.

Preuve. — Un π -sbm contient nécessairement une $(k1)$ -bipermutation. Soit $\gamma = (t_1 t_2 \dots t_r)$ un cycle de σ autre que celui de $f^{(k)}(\nu f^{(k)})$. Si toutes les lettres t étaient non fortes, on aurait en vertu du LEMME 7.1.7. :

place de $t_2 >$ place de t_1 ; place de $t_3 >$ place de t_2 ; etc. jusqu'à place de $t_r >$ place de t_{r-1} ; place de $t_1 >$ place de t_r ; d'où une contradiction.

7.1.9. LEMME. Un π -sbm admet toujours au moins une décomposition d-adaptée $\sigma_2 \sigma_1 = \sigma$.

Preuve. — Pour $\mathcal{Z}(\sigma) = 1$, il n'y a qu'une décomposition diédrale admettant pour point fixe $f^{(k)}(\nu f^{(k)})$, elle est nécessairement équilibrée, σ étant paire, et est adaptée par définition.

Pour $\mathcal{Z}(\sigma) > 1$, le cycle de $f^{(k)}(\nu f^{(k)})$ ayant été décomposé en prenant cette lettre pour point fixe, il est toujours possible et il est suffisant de décomposer un autre cycle de telle sorte qu'une lettre forte de ce cycle (LEMME 7.1.8.) soit point fixe de σ_1 . (Remarquer que s'il n'y a qu'un seul cycle de cette sorte et s'il est de longueur paire, il est nécessairement couplé avec celui de $f^{(k)}(\nu f^{(k)})$).

7.2. Lemmes techniques.

7.2.1. Les lemmes suivants (assez pénibles) ont pour but d'établir la proposition 7.2.11. qui permettra par la suite (7.3.) de conduire une récurrence; cette proposition est d'ailleurs intuitive (au moins pour qui a manipulé des π -sbm).

Nous abrégons la désignation des lettres "à définition simple", $f^{(k)}$, $f^{(k)}$, $f^{(k)} \cdot \sigma$ et $f^{(k)} \cdot \sigma^{-1}$ en q , a , x et z respectivement.

Les minuscules grecques, autres que φ , τ et σ , désignent des naturels positifs; ξ (resp. ζ) désignera le rang de x (resp. z) (au moins au début d'un calcul). Les majuscules latines désignent des suites de naturels positifs, éventuellement vides ou réduites à un seul élément.

7.2.2. LEMME. Soit A un π -sbm et y une lettre à rang variable autre que a et z . Si A contient une bipermutation de la forme

$$(f, f') = \begin{array}{cccc} \overline{k-1} & A & \xi & B \\ w & \dots & z & \dots \end{array}, \text{ avec les conditions :}$$

$$\min(B) \leq \text{rg}(y) < \xi \text{ ou } \text{rg}(y) < \xi < \max(B),$$

alors A contient également une bipermutation $(\hat{f}, \hat{f}')$ telle que l'on ait $\text{rg}(z) = \text{rg}(y) + 1$ et que la lettre w soit forte dans le π -système contraint $\mathbb{C}[(\hat{f}, \hat{f}'); z]$.

Preuve. Soit $\text{rg}(y) = \eta$. Il suffit manifestement d'étudier le cas $\xi > \eta + 1$. La suite B contient alors le rang α de a et, puisque $z \cdot \sigma = a$, B contient aussi immédiatement après ξ le rang $\beta \equiv 1 + \alpha \pmod{k-2}$, correspondant à une lettre s .

CASI: $\min(B) \leq \eta \leq \xi - 2$. Posons $\min(B) = \varepsilon$.

1. $\varepsilon = \beta$. Alors $\varepsilon = \beta = 1$ et $\alpha = k-2$. On a :

$$(f, f') = \begin{array}{cccccc} \overline{k-1} & A & \xi & 1 & C & \overline{k-2} \\ w & \dots & z & s & \dots & a \end{array}; \text{ rg}(y) = \eta;$$

$$\text{par } \tau_2: \begin{array}{cccccc} \overline{k-1} & A' & \xi+1 & 2 & C' & 1 \\ w & \dots & z & s & \dots & a \end{array}; \text{ rg}(y) = \eta + 1;$$

$$\text{par } \tau_1: \begin{array}{cccccc} \xi+1 & 2 & C' & \overline{k-1} & A' & 1 \\ z & s & \dots & w & \dots & a \end{array};$$

$\text{rg}(y)$ restant égal à $\eta + 1$;

par τ_2 :

$$\begin{array}{cccccc} \overline{\xi+1} & \overline{\xi-\eta+1} & C'' & \overline{k-1} & A'' & \overline{\xi-\eta} \\ \exists & s & \dots & w & \dots & a \end{array} ; \text{rg}(y) = \xi.$$

Puisque l'on a $\xi-\eta+1 \geq 3$, ayant attribué à s la place 1 par des opérations τ_1 , on peut donner à a le rang 1 par des opérations τ_2 , d'où le résultat annoncé.

2. $\varepsilon \neq \beta$. Alors $\beta > 1$ et $\beta = 1 + \alpha$. On a :

$$(f, f') = \begin{array}{cccccc} \overline{k-1} & A & \xi & \overline{1+\alpha} & C & \alpha \\ w & \dots & \exists & s & \dots & a \end{array},$$

de plus $a \neq y$ implique $\alpha \neq \eta$; mais on peut avoir $\eta = 1 + \alpha$.

2.1. $y = s$. Alors $1 + \alpha = \eta$ et $\eta \leq \xi - 2$ impliquant $3 \leq \xi - \alpha$, on a :

$$(f, f') = \begin{array}{cccccc} \overline{k-1} & A & \xi & \overline{1+\alpha} & C & \alpha \\ w & \dots & \exists & s & \dots & a \end{array} ; \text{rg}(y) = 1 + \alpha ;$$

par τ_2 :

$$\begin{array}{cccccc} \overline{k-1} & A' & \overline{\xi-\alpha+1} & 2 & C' & 1 \\ w & \dots & \exists & s & \dots & a \end{array} ; \text{rg}(y) = 2 ;$$

par τ_1 :

$$\begin{array}{cccccc} \overline{\xi-\alpha+1} & 2 & C' & \overline{k-1} & A' & 1 \\ \exists & s & \dots & w & \dots & a \end{array} ; \text{rg}(y) = 2 ;$$

par τ_2 :

$$\begin{array}{cccccc} \overline{\xi-\alpha+1} & \overline{\xi-\alpha} & C'' & \overline{k-1} & A'' & \overline{\xi-\alpha-1} \\ \exists & s & \dots & w & \dots & a \end{array} ; \text{rg}(y) = \xi - \alpha.$$

Puisque l'on a $\xi - \alpha \geq 3$, on termine comme au point 1.

2.2. $y \neq s$. Posons (modification de notations) :

$$\min(C, \alpha) = 1 + \varepsilon.$$

On a $1+\varepsilon \leq \eta < \xi-2$. Il est possible que la lettre de rang $1+\varepsilon$ soit a , mais alors $y \neq a$ entraîne l'inégalité stricte $1+\varepsilon < \eta$. De toute façon on a $\alpha - \varepsilon \geq 1$, donc $\xi + \alpha - \varepsilon - \eta \geq 3$. On a :

$$(f, f') = \begin{array}{ccccccc} \overline{k-1} & A & \overline{\xi+1+\alpha} & C_1 & \overline{1+\varepsilon} & C_2 \\ \wr & \dots & \zeta & \dots & m & \dots \end{array} ; \text{rg}(y) = \eta ;$$

par τ_2 :

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{k-1} & A' & \overline{\xi-\varepsilon} & \overline{1+\alpha-\varepsilon} & C_1' & 1 & C_2' \\ \wr & \dots & \zeta & \dots & m & \dots \end{array} ; \text{rg}(y) = \eta - \varepsilon ;$$

par τ_1 :

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{\xi-\varepsilon} & \overline{1+\alpha-\varepsilon} & C_1' & \overline{k-1} & A' & 1 & C_2' \\ \zeta & \dots & \dots & \wr & \dots & m & \dots \end{array} ; \text{rg}(y) = \eta - \varepsilon ;$$

par τ_2 :

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{\xi-\varepsilon} & \overline{\xi+\alpha-\varepsilon-\eta} & C_1'' & \overline{k-1} & A'' & \overline{\xi-\eta} & C_2'' \\ \zeta & \dots & \dots & \wr & \dots & m & \dots \end{array} ; \text{rg}(y) = \xi - \varepsilon - 1 ;$$

puisque l'on a $\text{rg}(s) \geq 3$, on termine comme en 1. .

Cas II : $\text{rg}(y) < \xi < \text{Max}(B)$.

Posons $\text{Max}(B) = \mu$ et $\mu + \Delta = k-1$. On a :

$$(f, f') = \begin{array}{ccccccc} \overline{k-1} & A & \xi & B_1 & \mu & B_2 \\ \wr & \dots & \zeta & \dots & m & \dots \end{array} ; \text{rg}(y) = \eta ;$$

par τ_2 :

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{k-1} & A' & \overline{\xi+\Delta} & B_1' & 1 & B_2' \\ \wr & \dots & \zeta & \dots & m & \dots \end{array} ; \text{rg}(y) = \eta + \Delta ;$$

et l'on est donc ramené au cas I. .

7.2.3. DÉFINITIONS. $(f, f') \in X' \times X'$ étant indécomposable et de type $\langle \varphi \rangle$, nous définissons deux applications Δ et $\bar{\Delta}$ de X dans $\mathbb{N}$ par :

(1) pour $y = f'(i)$:

$$\Delta y = \varphi(i+1) - \varphi(i) ;$$

(2) $\bar{\Delta} y = \text{rg}(y \cdot \sigma) - \text{rg}(y)$, si $y \cdot \sigma \neq a$ ($\forall q$) ;
 $\bar{\Delta} y = \text{rg}(a) - \text{rg}(y)$, si $y \cdot \sigma = a$ ($\forall q$) .

7.2.4. LEMME. $(f, f') \in X' \times X'$ n'étant ni réductible ni médiatement réductible, on a :

$$\min_{y \in X} \Delta y > 0 \} \geq Z(\sigma) - 2.$$

Preuve. - 1. Il découle immédiatement des définitions précédentes et de la formation de σ que dans une bipermutation ni réductible ni médiatement réductible de type $\langle \varphi \rangle$, u désignant la lettre de rang 1, l'inégalité $\bar{\Delta} y > 0$ implique :

- ou bien que l'on a $\Delta y > 0$;
- • ou bien que f' contient $y u$ et que l'on a $1 - \varphi(1) < \Delta y < 0$.

2. Pour tout cycle $\Gamma = (u \ u \cdot \sigma \ \dots \ u \cdot \sigma^n)$ autre que celui de a , l'on a $\sum_{y \in \Gamma} \bar{\Delta} y = 0$, donc l'un au moins des $\bar{\Delta} y$ est positif.

Le nombre des $\bar{\Delta}$ positifs est par conséquent au moins égal à $Z(\sigma) - 1$ et, d'après 1., celui des Δ positifs au moins égal à $Z(\sigma) - 2$.

Remarque. Dans le cycle de a , comme $\binom{q}{a}$ est pris une fois avec le rang k et une autre fois avec le rang $\alpha = \text{rg}(a)$, il est possible que tous les $\bar{\Delta}$ soient négatifs.

Il est aisé de vérifier que l'égalité peut être atteinte.

7.2.5. LEMME. Aux isomorphismes près, il existe :

1. pour $k=0$ et $k=1$, zéro bipermutation indécomposable et zéro π -système bipermutationnel ;
2. pour $k=2$, un seul π -système formé d'une seule bipermutation de type $\langle 21 \rangle$;
3. pour $k=3$, un seul π -système, une fois réductible, de cardinalité 3, engendré par une $(3/1)$ -bipermutation involutive et parfaite de type $\langle 321 \rangle$;
4. pour $k=4$, deux π -systèmes ; l'un est une fois réductible de cardinalité 12 et il est engendré par une $(4/1)$ -bipermutation involutive et parfaite de type $\langle 4231 \rangle$; l'autre est non réductible, de cardinalité 7 et il est engendré par une bipermutation $(4/1)$ -involutive et parfaite de type $\langle 4321 \rangle$;
5. pour $k=5$, quatre π -systèmes ; l'un deux fois réductible est engendré par la $(5/1)$ -bipermutation involutive et parfaite de type $\langle 52341 \rangle$; un second pu-médiatement réductible et de cardinalité 33 est engendré par une $(5/1)$ -bipermutation involutive et parfaite de type $\langle 52431 \rangle$; un troisième une fois réductible et de cardinalité 35 est engendré par une $(5/1)$ -bipermutation $k/1$ involutive et parfaite de type $\langle 53241 \rangle$; un quatrième non réductible de cardinalité 15 est engendré par une bipermutation $(5/1)$ -involutive et parfaite de type $\langle 54321 \rangle$;
6. pour $k=6$, sept π -systèmes dont deux non réductibles tous engendrés par des $(6/1)$ -bipermutations involutives et parfaites ; un non réductible, de cardinalité 134, correspond à $\langle 632541 \rangle$; l'autre non réductible, de cardinalité 31 correspond à $\langle 654321 \rangle$.

Un réductible et un pu-médiatement réductible correspondent aux types conjugués $\langle 643251 \rangle$ et $\langle 625431 \rangle$;

deux réductibles correspondent aux types conjugués $\langle 6 \overline{3} 3 4 5 1 \rangle$ (deux fois réductibles) et $\langle 6 \overline{2} 3 5 4 1 \rangle$ (une fois réductible et une fois π -réductible); un biréductible correspond à $\langle 6 \overline{2} 3 4 5 1 \rangle$.

Preuve.— Ces résultats se vérifient par un calcul purement mécanique, mais assez volumineux. Pour faire court, nous ne le reproduisons pas ici.

7.2.6. LEMME. Soit A un π -sbm non réductible, de substitution π -frontalière σ telle que $\mathcal{Z}(\sigma) > 1$ et muni d'une décomposition adaptée par le point fort w , soit $\sigma = \sigma_I \sigma_I$. Si A contient une bipermutation (f, f') telle que :

$$(a) (f, f') = \begin{array}{cccccccccccc} k-1 & A & 1 & B & \beta & C & \mathcal{Z} & \overline{1+\alpha} & D & \alpha \\ w & \dots & p & \dots & b & \dots & z & s & \dots & a \end{array} ;$$

$$(b) \text{Max}(D, 1+\alpha) < \mathcal{Z};$$

$$(c) \text{min}(B, C) > \text{min}(D, \alpha);$$

(d) p et b étant respectivement la première et la seconde par places croissantes des lettres σ_I -alternantes, toute lettre σ_I -alternante autre que p , b , a et éventuellement z , se place entre p et z ;

(e) toute lettre σ_I -alternante, autre que p , est de rang plus élevé que toutes les lettres de rang variable, alternantes ou non, de place supérieure à la sienne;

alors :

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{1+\alpha} & D & \alpha & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 & \overline{1+\alpha} & 2 & \alpha \\ s & \dots & a & = & s & a & \text{ou} & s & l & a & \text{ou} & s & e & a \end{array} .$$

Preuve.— On vérifie que les conditions impliquent $k \geq 5$; il existe alors au moins quatre lettres σ_I -alternantes.

1. Représentons par $[T_i]$, $i \in \{0, 1\}$, l'hypothèse que σ contient i transposition formée de lettres σ_I -fixes.

2. q désignant toujours la lettre de rang k , la condition (e) et la DÉFINITION 7.2.3.(1) entraînent l'implication suivante :

$$(2) \Delta y > 0 \Rightarrow \left[f' \text{ contient } yq \underset{\text{ou}}{\text{ou}} y \neq \alpha \text{ et } \text{rg}(y) = 1 \underset{\text{ou}}{\text{ou}} y \text{ est } \sigma_I\text{-fixe} \right].$$

3. Soit c_m la lettre autre que p et de rang γ_m minimal parmi les lettres de places inférieures à celle de z .

3.1. La minimalité de γ_m implique $\Delta c_m > 0$. En vertu de 2. et de $c_m \neq p$, on a :

soit (i) : c_m précède immédiatement q ;

(i α) si c_m était σ_I -alternante, en vertu de (e) et de la minimalité de γ_m , le membre f' contiendrait la suite $c_m q z$, d'où $\xi = \xi - 1$, contrairement à (e) ;

(i β) si c_m est σ_I -fixe comme l'est déjà u , σ contient alors la transposition $(c_m u)$;

soit (ii) : c_m est σ_I -fixe ;

il suffit alors d'examiner le cas non couvert par (i β) ; soit d la lettre telle que $d = c_m \cdot \sigma$ et soit $\text{rg}(d) = \delta$;

(ii α) si d est σ_I -alternante, en vertu de la condition (d), le type contient, dans l'une ou

i'autre des suites B ou C, la séquence $\delta 1+\gamma_m$.

La condition (c) implique alors $1+\gamma_m > \min(D, \alpha)$, et, comme $\gamma_m \neq \min(D, \alpha)$, on a $\gamma_m > \min(D, \alpha)$.

(ii β) Si d est aussi σ_I -fixe, σ contient la transposition $(d c_m)$.

3.2. $[T_0]$ implique donc $\gamma_m > \min(D, \alpha)$. Or, en vertu de la condition (e), l'inégalité $\mu < \min(D, \alpha)$ implique que la lettre m de rang μ est σ_I -fixe. Donc $[T_0]$ implique que l'ensemble :

$$\{x : 1 < \text{rg}(x) < \min(D, \alpha)\}$$

est vide, donc enfin que :

$$\min(D, \alpha) = 2.$$

3.3. L'hypothèse $[T_1]$ autorise dans σ une transposition au plus. Si la possibilité d'une telle transposition est déjà utilisée, et ce, ailleurs que pour les cas visés en 3.1.(i β) ou (ii β), la conclusion précédente reste acquise.

Ainsi, la conjonction $[T_1] \& [\text{il existe dans } \sigma \text{ une transposition formée de lettres } \sigma_I\text{-fixes et qui ne contient pas } c_m]$, implique $\min(D, \alpha) = 2$.

4. Si D n'est pas vide, la bipermutation est de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \overline{\Sigma} & 1+\alpha & 1+\lambda_1 & \dots & 1+\lambda_r & \alpha \\ \dots & \overline{\beta} & \beta & .. & \dots & .. & a \end{array} ; r \geq 1.$$

Les lettres de rang $1+\lambda_i$, $1 \leq i \leq r$, sont σ_I -fixes en vertu de (d); les lettres d'un rang autre que 1 et égal à :

$\lambda_1, \dots, \lambda_r, \alpha-1$, sont des lettres

σ_I - fixes en vertu des conditions (e) et (b).

4.1. Compte tenu de 3.2., l'hypothèse $[T_0]$ implique donc que l'on a dans (f, f') la séquence:

$$\begin{array}{c} \xi \ 3 \ 2 \\ \zeta \ s \ a \end{array} .$$

4.2. L'hypothèse $[T_1]$ implique que l'on a au delà de ζ une lettre au plus, autre que s et a .

4.2.1. Si l'on a effectivement trois lettres, alors on est dans les conditions prévues en 3.3. et l'on a $\min(D, \alpha) = 2$, avec un schéma:

$$\begin{array}{c} \xi \ 1+\alpha \ \lambda \ \alpha \\ \zeta \ s \ e \ a \end{array} .$$

(i) Pour $\alpha \neq 2$, on a donc $\begin{array}{c} \xi \ 1+\alpha \ 2 \ \alpha \\ \zeta \ s \ e \ a \end{array}$,

avec $\alpha > 3$ (condition de non réductibilité) et $1+\alpha < \xi$ (condition (b)). La possibilité offerte par $[T_1]$ est épuisée par la présence dans σ de la transposition répondant à $(2 \ \alpha-1)$.

(ii) Pour $\alpha = 2$, on a $\begin{array}{c} \xi \ 3 \ \lambda \ 2 \\ \zeta \ s \ e \ a \end{array}$, avec

$4 < \lambda < \xi$ et σ contient $(\lambda-1 \ 3)$.

4.2.2. Si l'on a seulement deux lettres, le schéma est $\begin{array}{c} \xi \ 1+\alpha \ \alpha \\ \zeta \ s \ a \end{array}$.

Si l'on avait $\alpha > 2$, les lettres de rang $\alpha-1$ et $1+\alpha$ étant σ_I -fixes, σ devrait contenir

la transposition $(1+\alpha \ \alpha-1)$, la conclusion 3.3. s'appliquerait et l'on aurait une contradiction.

Le schéma est donc $\begin{smallmatrix} \xi & 3 & 2 \\ z & 1 & a \end{smallmatrix}$, avec la

possibilité d'utiliser $[T_1]$ ailleurs.

4.3. Les possibilités pour $[T_0]$ et $[T_1]$ sont donc :

$$\begin{smallmatrix} \xi & 3 & 2 \\ z & 1 & a \end{smallmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{smallmatrix} \xi & 1+\alpha & 2 & \alpha \\ z & 1 & e & a \end{smallmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{smallmatrix} \xi & 3 & 1 & 2 \\ z & 1 & l & a \end{smallmatrix}.$$

5. Par τ_2 , (f, f') se transforme en :

$$(g, g') = \begin{smallmatrix} \overline{k-1} & A' & \overline{k-2} & B/\beta-1 & C' & \overline{5-1} & \alpha & D' & \overline{\alpha-1} \\ w & \dots & p & \dots & b & \dots & z & 1 & \dots & a \end{smallmatrix},$$

$$\text{Card}(\overline{D'}) \leq 1, \quad \min(D', \alpha-1) = 1.$$

Les conditions (b), (c), (d) et (e) restent valables et, dans cette dernière, la restriction sur p est levée.

(i) Si $\alpha-1 = 1$, la lettre de rang 1 ne donne pas lieu à Δ .

(ii) Si $\alpha-1 \neq 1$, la lettre de rang 1 est un point σ_I -fixe.

Pour (g, g') , l'implication (2) se change en :

$$(5) \Delta y > 0 \Rightarrow f' \text{ contient } yq \text{ ou } y \text{ est } \sigma_I\text{-fixe.}$$

6. Appelons point fixe positif (resp. néglatif) toute lettre σ_I -fixe y telle que $\Delta y > 0$ (resp. $\Delta y < 0$).

- (i) la lettre α_0 , de rang $k-1$, ne précède pas q (pour cause de non réductibilité) c'est un point fixe négatif;
- (ii) la lettre (sou l) qui dans g' précède immédiatement la lettre de rang 1 est un point fixe (condition (d)) négatif.

7. Si σ ne contient que des cycles de longueur impaire, $[\tau_0]$ est réalisé.

8. Si σ contient des cycles de longueur paire, ils vont par couple: l'un a deux points σ_I -fixes et l'autre ne contient que des lettres σ_I -alternantes. Si Γ_a est de longueur paire, il ne contient que des lettres σ_I -alternantes. Il y a donc au moins un autre cycle de longueur paire contenant deux points σ_I -fixes.

8.1. Appelons π (resp. ν) la cardinalité de l'ensemble des points fixes positifs (resp. négatifs). En vertu de (5) on a :

Card $\{y : \Delta y > 0\} = \delta^+ \leq 1 + \pi$, donc (en vertu des conséquences de la DÉFINITION 7.1.4.

$$\delta^+ \leq 1 + \sum (\sigma) - \nu$$

Or, en vertu du LEMME 7.1.4. on a :

$$\delta^+ \geq \sum (\sigma) - 2, \text{ d'où, en}$$

vertu de 6. qui donne $\nu \geq 2$:

$$\nu = \nu' + 2 ; \nu' \geq 0 ; \sum (\sigma) - 2 \leq \delta^+ \leq \sum (\sigma) - 1 - \nu'$$

8.2. Il y a donc au maximum un point fixe négatif possible, en plus de w et b (ou l). Or, chaque fois que l'on introduit dans σ une transposition formée de deux lettres σ_I -fixes, on introduit un point fixe négatif.

Donc $[T_1]$ est nécessairement réalisée.

9. La proposition résulte donc de 4.3., 7. et 8.2. .

7.2.7. LEMME. Soit A un π -sbm non réductible de substitution π -frontalière σ et muni d'une décomposition $\sigma = \sigma_2 \sigma_I$ adaptée par le point fort w .

Si A contient une bipermutation (f, f') vérifiant les conditions du LEMME 7.2.6. (dont on garde ici les notations), alors il existe une décomposition $\sigma = \overline{\sigma}_2 \overline{\sigma}_I$, également adaptée par le point fort w , et une bipermutation $(\hat{f}, \hat{f}')$ de A pour laquelle $\exists \cdot \tau_G$ est $\overline{\sigma}_I$ -alternante. De plus, la lettre w reste forte dans le π -système contraint $\mathbb{C}[(\hat{f}, \hat{f}'); \exists]$; w est explicitement forte dans $(\hat{f}, \hat{f}')$.

Preuve. - 1. Le cycle Γ_w de w possède les propriétés suivantes.

1.1. Si $\Gamma_w = (w w')$, la bipermutation (f, f') est de la forme :

$$(f, f') = \begin{array}{ccccccc} k-1 & 1+w' & \dots & w' & \dots & & \\ w & .. & \dots & w' & \dots & & \end{array} .$$

1.2. Si Γ_w est de longueur impaire, w est le seul point σ_I -fixe.

1.3. Si Γ_w est de longueur paire et supérieure à 2,

il existe un autre point σ_1 -fixe, soit $\overline{us}$. En vertu des conditions (d) et (e), β_i désignant les rangs des lettres σ_1 -alternantes du demi-cycle de $\overline{us}$, le type de (f, f') est de la forme :

$$\overline{k-1} \quad A \quad \text{rg}(\overline{us}) \quad 1+\overline{\beta_1} \quad B \quad \overline{\beta_1} \quad 1+\overline{\beta_2} \quad \dots \quad \overline{\beta_r} \quad 1+\overline{\omega'} \quad L \quad \omega' \quad k \quad M.$$

2. Il résulte de 1. que Γ_w ne contient pas le point σ_1 -fixe s (resp. l) et que Γ_w ne coïncide pas avec Γ_s (resp. Γ_l). Il suffit donc, pour passer de $\sigma_2 \sigma_1$ à $\overline{\sigma_2} \overline{\sigma_1}$ de modifier le seul pointage de Γ_s (resp. Γ_l) de telle façon que s (resp. l) devienne $\overline{\sigma_1}$ -alternante.

3. La proposition découle alors immédiatement des LEMMES 7.2.6. et 7.2.2. .

7.2.8. LEMME. Soit A un π -sbm non réductible, de substitution π -frontalière σ , et soit us une lettre forte de A qui, au cas où l'on aurait $\mathcal{Z}(\sigma) > 1$, serait prise dans un cycle autre que celui de $f^{(k)}$.

Pour $f^{(k)} \cdot \sigma \neq f^{(k)} \cdot \sigma^{-1}$, il existe au moins une décomposition adaptée $\sigma = \sigma_2 \sigma_1$ et une bipermutation (f, f') de A telles que :

1. $f^{(k)} \cdot \sigma^{-1} \tau_G$ soit σ_1 -alternante ;
2. et au cas où l'on a $\mathcal{Z}(\sigma) > 1$, la lettre forte us qui adapte la décomposition reste forte dans le π -système contraint :

$$\mathbb{C} [(f, f') ; f^{(k)} \cdot \sigma^{-1}] ;$$

elle est explicitement forte dans (f, f') .

Preuve. - 1. Cas où $\chi(\sigma) = 1$.

Le cycle de a est nécessairement de longueur impaire, d'où $k = 2k'$, et σ_I n'a qu'un point fixe. A contient une $(k1)$ -bipermutation de type $\langle \varphi \rangle$, où S précède immédiatement 2 et, par τ_1 on passe au type $\langle A S 2 1 \rangle$. En vertu du LEMME 7.2.5., il suffit d'examiner les cas où $k = 2k' \geq 8$ (car pour $2k' \leq 6$, la $(k1)$ -bipermutation involutive et parfaite que contiennent les π -systèmes, et la décomposition qui lui est naturellement attachée, vérifient la proposition).

A. Si le point fixe de σ_I n'est pas l'élément u de rang 2 , on prouve la proposition en donnant à z la place 1 par des opérations τ_1 , puis en attribuant à u le rang $S-1$ par des opérations τ_2 .

B. Si le point fixe de σ_I est u , mais si $S > 3$, il existe au moins une lettre σ_I -alternante v de rang inférieur à S , et l'on procède avec v comme on l'a fait avec u au point A.

C. Si u est point fixe de σ_I avec $S = 3$, on vérifie directement que le type ne peut pas être :

$$\langle k \quad \overline{k-1} \dots \overline{\beta+1} \quad \beta \dots 3 \quad 2 \quad 1 \rangle,$$

car 2 n'y est pas point fixe de σ_I .

Le type contient donc nécessairement une paire $\beta\gamma$ avec $\beta \leq \gamma-2$, et nous considérons celle qui est la plus à gauche. La bipermutation s'écrit alors :

$$\begin{array}{ccccccc} \delta & B & \beta & \gamma & C & 3 & 2 & 1 \\ d & \dots & b & c & \dots & z & u & a \end{array}, \text{ la suite } \delta B \beta \text{ étant}$$

décroissante par hypothèse.

(i) Cas où $\delta < \gamma$. On a: $\gamma \geq 6$; $\delta \geq 5$; $\beta \geq 4$; $\gamma - \delta \geq 2$.

Par τ_2 :

$$\begin{array}{cccccccc} \delta & B' & \overline{\beta-2} & \gamma & C' & 1 & \overline{\delta-1} & \overline{\delta-2} \\ d & \dots & b & c & \dots & z & u & a \end{array} ;$$

par τ_1 :

$$\begin{array}{cccccccc} \gamma & C' & \delta & B' & \overline{\beta-2} & 1 & \overline{\delta-1} & \overline{\delta-2} \\ c & \dots & d & \dots & b & z & u & a \end{array} ;$$

par τ_2 :

$$\begin{array}{cccccccc} \gamma & C'' & z & B'' & \beta_1 & \overline{\gamma-\delta+3} & 2 & 1 \\ c & \dots & d & \dots & b & z & u & a \end{array} ;$$

avec $\text{rg}(z) = \xi = \gamma - \delta + 3 \geq 4$. Par τ_1 puis τ_2 , on attribue $\bar{a}$ le rang $\xi - 1$.

(ii) Cas où $\delta > \gamma$. On a: $\beta \geq 4$; $\gamma \geq 6$; $\beta + 2 < \gamma < \delta$.

Par τ_1 :

$$\begin{array}{cccccccc} \gamma & C & z & 2 & \delta & B & \beta & 1 \\ c & \dots & z & u & d & \dots & b & a \end{array} ;$$

par τ_2 :

$$\begin{array}{cccccccc} \gamma & C' & \overline{\gamma-\beta+3} & \overline{\gamma-\beta+2} & \delta & B' & 1 & \overline{\gamma-\beta+1} \\ c & \dots & z & u & d & \dots & b & a \end{array} ;$$

avec $\text{rg}(z) = \xi = \gamma - \beta + 3 \geq 5$. Par τ_1 puis τ_2 , on attribue $\bar{a}$ le rang $\xi - 1$.

2. Cas où $\mathcal{Z}(\sigma) > 1$.

Il existe dans A (au moins) une bipermutation où la lettre forte, qui est σ_I -fixe, possède simultanément la place 1 et le rang $k-1$.

Soit p celle des lettres σ_I -alternantes qui a la plus petite place ; il est toujours loisible de supposer qu'on lui a attribué le rang 1 par des opérations τ_2 , d'où :

$$(f, f') = \begin{array}{ccccccc} \overline{k-1} & A & 1 & B & & & \\ w & \dots & p & \dots & & & \end{array} .$$

A. Il existe une lettre m telle que $\text{place}(m) > \text{place}(z)$ et $\text{rg}(m) > \xi$.

La proposition résulte alors du LEMME 7.2.2. .

B. Toute lettre m de place supérieure à celle de z est telle que $\text{rg}(m) < \xi$.

B.1. Il existe une lettre v alternante telle que $\text{place}(v) > \text{place}(z)$.

Étant la suite des rangs au delà de ξ , on a alors $\min(D) \leq \text{rg}(v) < \xi$ et la proposition résulte alors du LEMME 7.2.2. .

B.2. Toute lettre σ_I -alternante est en deçà de z .

Alors p est en deçà de z et l'on a :

$$(f, f') = \begin{array}{ccccccc} \overline{k-1} & A & 1 & C & \xi & D & \\ w & \dots & p & \dots & z & \dots & \end{array} ; \text{Max}(D) < \xi.$$

B.2.1. Il existe une lettre σ_I -alternante v telle que :

$$\min(D) \leq \text{rg}(v) < \xi.$$

La proposition résulte alors du LEMME 7.2.2. .

B.2.2. Pour toute lettre σ_I -alternante v on a :

Soit $\text{rg}(v) > \xi$, soit $\text{rg}(v) < \min(D) < \xi$.

B.2.2.1. Il existe dans C une lettre b de rang β tel que : $2 \leq \beta < \varepsilon = \min(D)$.

On procède alors de la façon ci-après.

On part de :

$$(f, f') = \begin{array}{cccccccc} \overline{k-1} & A & 1 & C_1 & \beta & C_2 & \xi & D_1 & \varepsilon & D_2 \\ w & \dots & p & \dots & b & \dots & z & \dots & e & \dots \end{array} ;$$

$$\text{par } \tau_2: \begin{array}{cccccccc} \overline{k-1} & A' & \overline{k-\beta} & C'_1 & 1 & C'_2 & \overline{\xi+1-\beta} & D'_1 & \overline{\varepsilon-\beta+1} & D'_2 \\ w & \dots & p & \dots & b & \dots & z & \dots & e & \dots \end{array} ;$$

$$\text{par } \tau_1: \begin{array}{cccccccc} \overline{k-\beta} & C'_1 & \overline{k-1} & A' & 1 & C'_2 & \overline{\xi+1-\beta} & D'_1 & \overline{\varepsilon-\beta+1} & D'_2 \\ p & \dots & w & \dots & b & \dots & z & \dots & e & \dots \end{array} ;$$

$$\text{par } \tau_2: \begin{array}{cccccccc} \overline{k-\beta} & C''_1 & \overline{k-1} & A'' & \overline{k-\xi} & C''_2 & 1 & D'' \\ p & \dots & w & \dots & b & \dots & z & \dots \end{array} ; 1+\varepsilon'' = \min(D'') \text{ et } 1+\varepsilon'' \leq \overline{k-\beta-2}$$

$$\text{par } \tau_1: \begin{array}{cccccccc} \overline{k-1} & A'' & \overline{k-\xi} & C''_2 & \overline{k-\beta} & C''_1 & 1 & D'' & \overline{1+\varepsilon''} & D''_2 \\ w & \dots & b & \dots & p & \dots & z & \dots & m & \dots \end{array} ;$$

$$\text{par } \tau_2: \begin{array}{cccccccc} \overline{k-1} & A''' & \overline{k-\beta-\varepsilon''} & C''' & \overline{k-1-\varepsilon''} & D''' & 1 & D''' \\ w & \dots & p & \dots & z & \dots & m & \dots \end{array} ;$$

La proposition résulte alors du LEMME 7.22.

B.2.2.2. Toute lettre de C est de rang supérieur à $\min(D)$.

Alors, en vertu de B.2.2., toute lettre σ_I -alternante est de rang supérieur à ξ .

Soit b la première lettre alternante, soit b_i les autres, β (resp. β_i) leur rang. On a :

$$(f, f') = \begin{array}{cccccccc} \overline{k-1} & A & 1 & B_0 & \beta & B_1 & \beta_1 & \dots & \xi & D \\ w & \dots & p & \dots & b & \dots & b_1 & \dots & z & \dots \end{array} ;$$

Compte tenu des LEMMES 7.2.6. et 7.2.7 qui couvrent l'éventualité contraire, on peut supposer qu'il existe dans quelque B_i un rang γ avec $\gamma = \beta_i + \Delta$, $\Delta > 0$.

Soit $\gamma = \text{rg}(c)$. On a :

$$(f, f') = \begin{array}{ccccccccc} \overline{k-1} & E & \beta_i & F & \overline{\beta_i + \Delta} & G & \overline{\Sigma} & D \\ w & \dots & b_i & \dots & c & \dots & z & \dots \end{array}; \beta_i + \Delta + \pi = k-1;$$

par τ_2 :

$$\begin{array}{ccccccccc} \overline{k-1} & E' & \overline{\beta_i + \pi} & F' & 1 & G' & \overline{\Sigma + \pi} & D' \\ w & \dots & b_i & \dots & c & \dots & z & \dots \end{array};$$

par τ_1 :

$$\begin{array}{ccccccccc} \overline{\beta_i + \pi} & F' & \overline{k-1} & E' & 1 & G' & \overline{\Sigma + \pi} & D' \\ b_i & \dots & w & \dots & c & \dots & z & \dots \end{array};$$

par τ_2 :

$$\begin{array}{ccccccccc} \overline{\beta_i + \pi} & F'' & \overline{k-1} & E'' & \overline{\beta_i + 1 - \Sigma} & G'' & 1 & D'' \\ b_i & \dots & w & \dots & c & \dots & z & \dots \end{array};$$

avec $\text{Max}(D'') \leq \beta_i + \pi - 1$ et $1 + E'' = \min(D) \leq \beta_i + \pi - 2$;

par τ_1 :

$$\begin{array}{ccccccccc} \overline{k-1} & E'' & \overline{\beta_i + 1 - \Sigma} & G'' & \overline{\beta_i + \pi} & F'' & 1 & D'' \\ w & \dots & c & \dots & b_i & \dots & z & \dots \end{array};$$

et l'on termine comme en B.2.2.1.

7.2.9. LEMME. Soit A un π -sbm non réductible de substitution π -frontalière σ et, au cas où $\chi(\sigma) > 1$, soit w une lettre forte prise dans un cycle autre que celui de $f^{(k)}(w f^{(k)})$. Dans le cas où $f^{(k)} \cdot \sigma \neq f^{(k)} \cdot \sigma^{-1}$, il existe au moins une décomposition adaptée (par w pour $\chi(\sigma) > 1$), soit $\sigma = \sigma_2 \sigma_1$, et dans A une bipermutation $(\hat{f}, \hat{f}')$ telles que :

1. la transposition $\left(f^{(k)} \cdot \sigma \tau_G \quad f^{(k)} \cdot \sigma \tau_G^{-1} \right)$ appartient à l'involution σ_I ;
2. au cas où $\mathcal{Z}(\sigma) > 1$, la lettre forte w qui adapte la décomposition reste forte dans le pi-système contraint $\mathbb{C}[(\hat{f}, \hat{f}'); \{f^{(k)} \cdot \sigma, f^{(k)} \cdot \sigma^{-1}\}]$, étant explicitement forte dans $(\hat{f}, \hat{f}')$.

Preuve. — En vertu du LEMME 7.2.8., il existe dans $\mathcal{A}$ une bipermutation (f_0, f'_0) et une décomposition telles que dans:

$$(f_0, f'_0) = \begin{array}{ccccccc} \overline{k-1} & \dots & \overline{\xi} & \overline{1+\alpha} & \dots & \alpha \\ w & \dots & z & b & \dots & a \end{array},$$

la lettre de rang $\xi-1$ soit σ_I -alternante et qu'au cas où $\mathcal{Z}(\sigma) > 1$, w soit la lettre qui adapte la décomposition.

De cette bipermutation on passe, en respectant la contrainte sur z , à une bipermutation :

$\begin{array}{ccccccc} k & \overline{k-1} & A & 1 & B & \alpha \\ q & w & \dots & \dots & \dots & a \end{array}$, où $\xi = k-2$, et où A n'est pas vide puisque $\mathcal{A}$ n'est pas réductible et où enfin $\alpha \neq k-2$, car $\mathcal{A}$ n'est pas médiatement pi-u-réductible.

Posons $\text{Max}(A) = \mu$.

1. Cas où $\mu > \alpha$ (réalisé pour $\alpha = 1$).

Si l'on avait $\mu = \xi$, comme le type contient la suite $\overline{\xi} \overline{1+\alpha}$, on confierait à $1+\alpha$ le rôle tenu par μ dans le calcul suivant.

On part de :

$$(f, f') = \begin{array}{cccccccc} k & \overline{k-1} & A_1 & \mu & A_2 & 1 & B & \alpha \\ q & w & \dots & m & \dots & u & \dots & a \end{array};$$

par τ_1 :

$$\begin{array}{ccccccc} \mu & A_2 & k & \overline{k-1} & A_1 & 1 & B & \alpha \\ m & \dots & q & u^r & \dots & u & \dots & a \end{array} ;$$

par τ_2 :

$$\begin{array}{ccccccc} \mu & A'_2 & k & \overline{k-1} & A'_1 & \overline{\mu+1-\alpha} & B' & 1 \\ m & \dots & q & u^r & \dots & u & \dots & a \end{array} .$$

Pour $Z(\sigma) > 1$, u^r étant σ_I -fixe n'est pas la lettre qui alterne avec $z \cdot \tau_G$.

Pour $Z(\sigma) = 1$, le cas où la lettre qui alterne avec $z \cdot \tau_G$ n'est pas u^r (lettre u^r qui dans ce cas n'a pas de rôle adaptant) se traite de la même façon que pour $Z(\sigma) > 1$. On attribue à x la place 1 par des opérations τ_1 puis, par des opérations τ_2 qui conservent $z \cdot \tau_G$ (LEMME 7.1.3.), on attribue à son associé le rang $k-3$, en sorte qu'il devient $x \cdot \tau_G$.

La présence du groupement $\begin{array}{cc} k & \overline{k-1} \\ q & u^r \end{array}$ fait que la lettre u^r reste forte dans le pi-système contraint sur $\{x, z\}$.

2. Cas où $\mu < \alpha$.

Alors $k-2$ et $5+\alpha$ sont au delà de 1:

$$(f, f') = \begin{array}{ccccccc} k & \overline{k-1} & A_1 & \mu & A_2 & 1 & B & \alpha \\ q & u^r & \dots & m & \dots & u & \dots & a \end{array} ;$$

par τ_1 :

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{k-1} & A_1 & \mu & A_2 & k & 1 & B & \alpha \\ u^r & \dots & m & \dots & q & u & \dots & a \end{array} ; \mu < \alpha ;$$

par τ_2 :

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{k-1} & A'_1 & k-2 & A'_2 & k & \overline{k-1-\mu} & B' & \alpha-\mu \\ u^r & \dots & m & \dots & q & u & \dots & a \end{array} ;$$

en vertu de la définition de μ , 1 se trouve au delà de k .

Conduisant m à la place 1 par des opérations τ_1 et, par des opérations τ_2 , faisant ensuite $\text{rg}(u) = 1$, on obtient $\text{rg}(a) = \alpha - 1$.

On arrivera nécessairement au cas 1.

3. Il reste le cas où $\mathcal{Z}(\sigma) = 1$ et où la lettre qui alterne dans σ_I avec $z \cdot \tau_G$ est w .

On vérifie d'abord que dans le type $\bar{a}$ renversement complet, lequel présente une seule lettre forte, w n'est pas cet associé.

Le type n'étant donc pas $\bar{a}$ renversement complet, il y a donc un Δ positif, et l'on forme une bipermutation analogue où la nouvelle lettre forte n'est plus w .

7.2.10. LEMME. Soit A un π -sbm non réductible, de substitution π -frontalière σ telle que l'on ait $f^{(k)} \cdot \sigma = f^{(k)} \cdot \sigma^{-1}$ et soit w une lettre forte.

Il existe au moins une décomposition $\sigma = \sigma_2 \sigma_I$ adaptée par w , et dans A une bipermutation $(\hat{f}, \hat{f}')$ au moins, telles que le point fixe $(f^{(k)} \cdot \sigma \tau_G)$ appartienne à σ_I et que w reste forte dans le π -système contraint $\mathcal{C}[(\hat{f}, \hat{f}'); f^{(k)} \cdot \sigma]$, étant explicitement forte dans $(\hat{f}, \hat{f}')$.

Preuve. -- En vertu du LEMME 7.2.5., on peut supposer $k \geq 6$. Il est clair que les conditions $x = y$ et $k > 4$ impliquent $\mathcal{Z}(\sigma) > 1$.

Les hypothèses faites assurent l'existence dans A d'une bipermutation (f, f') où w figure avec la place 1 et le rang $k-1$. Comme le cycle de a est pair, il

existe au moins une lettre σ_I -fixe, soit p , autre que w . On a donc $\text{rg}(p) \neq k-1$. D'autre part $\xi = \xi$.

La démonstration se conduit comme celle du LEMME 7.2.9., points 1. et 2. ; à partir de :

$$\begin{array}{ccccccc} k & k-1 & A & 1 & B & \alpha \\ q & w & \dots & \dots & \dots & a \end{array} ; \text{ avec } \xi = \xi = k-2,$$

on attribue à p le rang $k-3$.

7.2.11. PROPOSITION. Soit A un π -système bipermutationnel minimal non réductible, de substitution π -frontalière σ et, au cas où $\mathcal{Z}(\sigma) > 1$, soit w une lettre forte prise dans un cycle autre que celui de $f^{(k)}$.

Pour $f^{(k)} \cdot \sigma \neq f^{(k)} \cdot \sigma^{-1}$ [resp. $f^{(k)} \cdot \sigma = f^{(k)} \cdot \sigma^{-1}$], il existe au moins une décomposition adaptée (par w , pour $\mathcal{Z}(\sigma) > 1$) et dans A au moins une bipermutation $(\hat{f}, \hat{f}')$ telles que :

1. la transposition $(f^{(k)} \cdot \sigma \quad f^{(k)} \cdot \sigma^{-1})$ [resp. le point fixe $(f^{(k)} \cdot \sigma) = (f^{(k)} \cdot \sigma^{-1})$] appartienne à l'involution σ_1 , $\sigma_1 = \tau_G \sigma_I \tau_G^{-1}$;

2. pour $\mathcal{Z}(\sigma) > 1$, la lettre forte w , point fixe de σ_I , reste forte explicitement dans $(\hat{f}, \hat{f}')$.

Preuve. — L'hypothèse que la transposition $(a \cdot \sigma \quad a \cdot \sigma^{-1})$ [resp. le point fixe $(a \cdot \sigma) = (a \cdot \sigma^{-1})$] appartienne à l'involution $\sigma_1 = \tau_G \sigma_I \tau_G^{-1}$ équivaut à l'hypothèse que la transposition $(a \cdot \sigma \tau_G \quad a \cdot \sigma^{-1} \tau_G)$ [resp. le point fixe $(a \cdot \sigma \tau_G) = (a \cdot \sigma^{-1} \tau_G)$] appartienne à l'involution σ_I . La proposition découle alors immédiatement des LEMMES 7.2.9 et 7.2.10. .

Conséquence.— La proposition s'étend aussitôt aux π -systèmes minimaux quelconques, en passant par l'intermédiaire du π -système non réductible obtenu par réduction maximale.

7.3. Une propriété des π -systèmes minimaux

7.3.1. Notations. Dans ce qui suit, nous désignons par E l'ensemble $\{f^{(k)} \cdot \sigma, f^{(k)} \cdot \sigma^{-1}\} = \{x, z\}$. D'autre part, si $\text{Card } E = 2$ [resp. 1], nous représentons par (E) la transposition (xz) [resp. le point fixe $(x) = (z)$].

En outre, pour $\theta \in \mathcal{G}_A$, nous désignons la substitution $\mathcal{S}_E \theta$ par la notation $\bar{\theta}$; de même, nous désignons par $(\bar{f}, \bar{f}')$ la bipermutation qui procède de (f, f') par l'effacement des éléments de E .

7.3.2. THÉORÈME. A étant un π -système minimal sur un alphabet X de cardinalité $k \geq 2$, σ étant la substitution π -frontalière de A , à toute décomposition adaptée $\sigma = \sigma_2 \sigma_1$ on peut associer une $(k-1)$ -bipermutation (f, f') involutive de A telle que les involutions naturellement attachées à (f, f') soient σ_2 et $\sigma_1 = \tau_G^{-1} \sigma_1 \tau_G$.

Preuve.— La proposition étant vraie pour $k \leq 5$ en vertu du LEMME 7.2.5., la démonstration se fera par récurrence sur la cardinalité de X .

Soit (f, f') une bipermutation de A dont l'existence et les propriétés sont garanties par la PROPOSITION 7.2.11. ; on peut supposer que (f, f') est une $(k-1)$ -bi-

permutation. Les alphabets $\bar{\mathcal{A}}$ et ${}^+\mathcal{A}$ ayant été canoniquement identifiés, le cycle (E) étant commun à σ_1 et σ_2 , substitutions liées par la relation :

$$\sigma_2 \tau_G^{-1} \sigma_1 = \tau_D,$$

le théorème de déletion s'applique alors dans $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ ($\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}} = {}^+\mathcal{A}$), d'où successivement :

$$\bar{\sigma}_2 \bar{\tau}_G^{-1} \bar{\sigma}_1 = \bar{\tau}_D, \text{ et :}$$

$$(1) \sigma_P = \tau_D \tau_G = \sigma_2 \cdot (\tau_G^{-1} \sigma_1 \tau_G) = \sigma_2 \eta.$$

Le système contraint $\mathbb{C}[(f, f'); E]$ porte un pi-système non contraint Λ_P dont σ_P est la substitution pi-frontalière. (1) est pour σ_P une décomposition équilibrée en produit d'involutions, et adaptée (éventuellement par la lettre w explicitement forte dans (f, f')).

En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe dans Λ_P une bipermutation (k_1) -involutive $\bar{b}$ pour laquelle $\bar{\sigma}_2$ est l'involution naturellement attachée. La bipermutation (f, f') de $\mathbb{C}$, donc de Λ , qui porte $\bar{b}$ est donc (k_1) -involutive et admet σ_2 pour involution naturellement attachée.

$\bar{b} = (f_0, f'_0)$ permet de former tous les systèmes contraints attachés à la décomposition diédrale $\sigma_2 \sigma_I$, donc toutes les décompositions équilibrées et adaptées, éventuellement par w , et le procédé s'applique encore pour chacune.

Pour $\mathcal{Z}(\sigma) > 1$, on fera décrire à w l'ensemble des lettres fortes, d'où chaque fois un nouveau point de départ fourni par la PROPOSITION 7.2.11.

8. Groupe des automorphismes d'un π -système bipermutationnel minimal.

8. Groupe des automorphismes d'un π -système bipermutationnel minimal.

8.1. π -sbm de types.

8.1.1. PROPOSITION. Le groupe des automorphismes d'un π -système minimal de types bipermutationnels est un groupe cyclique d'ordre deux, formé de l'identité et de l'inversotypie.

Preuve.— En vertu de la PROPOSITION 6.2.2., il n'existe pas d'autre isomorphisme simple que l'identité. En vertu de la PROPOSITION 6.2.4., il existe une inversotypie si le π -système est engendré par un type involutif. En vertu du THÉORÈME 7.3.2., il en est toujours ainsi.

Conséquence. Le groupe des automorphismes d'un π -sbm est donc le produit direct du groupe des isotypies par le groupe cyclique d'ordre deux lié à l'inversotypie.

Nous commencerons par montrer que le groupe des isotypies d'un π -sbm n'est pas nécessairement trivial.

8.2. Groupe des isotopies.

8.2.1. Notations. S désignant une suite de rangs figurant dans un type, nous désignons par S_L la suite des lettres qui correspondent à S dans le second membre d'une bipermutation de ce type et par $S^{+\lambda}$ (resp. $S^{-\lambda}$) la suite obtenue en augmentant (resp. diminuant) de λ chaque rang de S .

8.2.2. LEMME. Soit $b = \begin{smallmatrix} k & S & 1 \\ q & S_L & a \end{smallmatrix}$ une bipermutation sur X , on forme la bipermutation :

$$b_y = \begin{smallmatrix} k+\lambda & \lambda+1 & \lambda & \dots & 3 & 2 & S^{+\lambda} & 1 \\ q & y_\lambda & y_{\lambda-1} & \dots & y_2 & y_1 & S_L & a \end{smallmatrix} ;$$

pour $\lambda \in \mathbb{N}$; $\lambda \geq 1$; $y_1, y_2, \dots, y_\lambda \in X$.

Si le π -sbm $A(b)$ engendré par b contient la bipermutation :

$$\hat{b} = \begin{smallmatrix} k & S & 1 \\ q & \hat{S}_L & a \end{smallmatrix} ,$$

isotype de b , alors le π -sbm engendré par b_y contient :

$$\hat{b}_y = \begin{smallmatrix} k+\lambda & \lambda+1 & \lambda & \dots & \overset{S^{+\lambda}}{3} & 2 & 1 \\ q & y_\lambda & y_{\lambda-1} & \dots & \hat{S}_L y_2 & y_1 & a \end{smallmatrix} ,$$

isotype de b_y .

Preuve. — Le π -système contraint $C = C[b; \{y_i : 1 \leq i \leq \lambda\}]$ porte un π -système isomorphe à $A(b)$ et il suffit de copier le calcul qui dans A_b mène de b à $\hat{b}$,

puisque l'on a $y_1 \cdot \tau_G = a$, $y_{i+1} \cdot \tau_G = y_i$, et les analogues avec τ_D^{-1} .

8.2.3. PROPOSITION. Une condition suffisante pour que le groupe des isotopies d'un π -sbm A ne soit pas trivial, est que A contienne une bipermutation de la forme:

$$b = \begin{matrix} k & \lambda & \lambda-1 & \dots & 3 & 2 & S & 1 \\ q & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & S_L & a \end{matrix},$$

et que le π -sbm engendré par la bipermutation:

$$b' = \begin{matrix} k-\lambda & S & 1 \\ q & S_L & a \end{matrix},$$

admette un groupe non trivial d'isotopies.

Preuve. — Découle immédiatement du lemme précédent.

8.2.4. PROPOSITION. Si un π -sbm médiatement π -u-réductible contient une bipermutation de la forme:

$$b = \begin{matrix} k & 2 & \overline{\lambda+1} & \lambda & \dots & 3 & \overline{\lambda+2} & S & 1 \\ q & b & c_0 & c_1 & \dots & c_{\lambda-2} & d & S_L & a \end{matrix},$$

son groupe d'isotopies contient le sous-groupe cyclique engendré par le cycle $(b c_0 c_1 \dots c_{\lambda-2})$.

Preuve. — Elle résulte du calcul suivant, fait à partir de b .

Par τ_1 :

$$\begin{matrix} \overline{\lambda+1} & \lambda & \dots & 3 & \overline{\lambda+2} & S & k & 2 & 1 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_{\lambda-2} & d & S_L & q & b & a \end{matrix};$$

par τ_2 :

$$\begin{matrix} \overline{\lambda+1} & \overline{\lambda-1} & 2 & \overline{\lambda+2} & S & k & 1 & \lambda \\ c_0 & c_1 & c_{\lambda-2} & d & S_L & q & b & a \end{matrix};$$

par τ_1 :

$$\begin{array}{cccccccc} \overline{\lambda+2} & S & k & \overline{\lambda+1} & \overline{\lambda-1} & \dots & 2 & 1 & \lambda \\ d & S_L & q & c_0 & c_1 & \dots & c_{\lambda-2} & b & a ; \end{array}$$

par τ_2 :

$$\begin{array}{cccccccc} \overline{\lambda+2} & S & k & 2 & \overline{\lambda+1} & \dots & 4 & 3 & 1 \\ d & S_\lambda & q & c_0 & c_1 & \dots & c_{\lambda-2} & b & a ; \end{array}$$

par τ_1 :

$$\begin{array}{cccccccc} k & 2 & \overline{\lambda+1} & \dots & 4 & 3 & \overline{\lambda+2} & S & 1 \\ q & c_0 & c_1 & \dots & c_{\lambda-2} & b & d & S_L & a ; \end{array}$$

ce qui établit la proposition.

Conséquence. Les deux propositions permettent de construire de proche en proche des π -sbm dont le groupe d'isotypies n'est pas trivial.

EXEMPLES: à partir du type $\langle 5 \ 2 \ 4 \ 3 \ 1 \rangle$, les types $\langle 7 \ 3 \ 2 \ 4 \ 6 \ 5 \ 1 \rangle$, $\langle 11 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 7 \ 6 \ 8 \ 10 \ 9 \ 1 \rangle$ etc. .

L'étude du groupe d'isotypies n'est donc pas vide d'objet et un résultat donnant une condition suffisante pour que ce groupe soit trivial, n'est pas a priori sans valeur.

8.2.5. LEMME. $\mathcal{S}$ et $\hat{\mathcal{S}}$ étant deux bipermutations isotopes appartenant à un même π -sbm A , si une lettre t a le même rang dans $\mathcal{S}$ et dans $\hat{\mathcal{S}}$, elle y a aussi la même place (et inversement) et il en va de même pour toutes les lettres du cycle de t dans la substitution π -frontalière σ .

Preuve. — La première assertion est évidente, le reste découle immédiatement de l'algorithme de formation de σ .

8.2.6. PROPOSITION. Si la substitution π -frontalière σ d'un π -sbm A ne comprend qu'un cycle, le groupe des isotopies de A est trivial, et A est isomorphe à son π -système de types.

Preuve. — La lettre q de rang k permet l'application du LEMME 8.2.5., et l'on épuise σ par hypothèse.

8.2.7. THÉORÈME. Le groupe des isotopies d'un π -sbm de substitution π -frontalière σ est un sous-groupe cyclique, non nécessairement trivial, du groupe des substitutions de $\mathbb{G}_A$ qui conservent individuellement les cycles de σ (autre que celui des deux dernières identifiées) pointés par les lettres fortes.

Preuve. — Le fait que le groupe est non nécessairement trivial a été noté. La substitution π -frontalière σ et l'ensemble des lettres fortes sont des invariants attachés au π -sbm. La proposition est donc immédiate dans tous les cas où les cycles de σ (autres que celui des dernières) ont tous des longueurs différentes.

Lorsqu'il y a au moins deux cycles utiles d'égale longueur dans σ , l'argument, que nous nous bornerons à présenter sur un exemple, consiste à se ramener à ce cas par insertion d'une nouvelle lettre.

Soit:

$$b = \begin{array}{ccccccccc} & 9 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ i & d & c & b & e & h & g & f & a \end{array}; \sigma = \begin{pmatrix} i \\ a \end{pmatrix} (c) (bd) (eg) (fh);$$

et:

$$\hat{b} = \begin{array}{ccccccccc} & 9 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ i & h & c & f & e & d & g & b & a \end{array}; \sigma = \begin{pmatrix} i \\ a \end{pmatrix} (c) (fh) (eg) (bd).$$

Si l'on pouvait passer de $\hat{b}$ à $\hat{b}$ dans le même système A , on pourrait passer dans un même système A' de:

$$\hat{b}' = (a b c d e b' b f g h i, i d c b b' e h g f a)$$

$$\hat{\hat{b}}' = (a f c h e b' b g d i, i h c f e d g b b' a)$$

avec:

$$\sigma' = \begin{pmatrix} i & c \\ a & \end{pmatrix} (b e g b' d) (f h),$$

par $(d h)(b f)$, ce qui est impossible, car les lettres ne sont pas dans le même cycle.

8.2.8. THÉORÈME. Le groupe des automorphismes d'un π -sbm est diédral.

Preuve. — Découle du théorème précédent et de la PROPOSITION 8.1.1. (Conséquence).

9. Un problème de commutateur.

9. Un problème de commutateur.

9.1. Préliminaires.

9.1.1. Etant donné un ensemble fini non vide de cardinalité n , si l'on veut étudier au moyen de techniques bipermutationnelles le groupe symétrique s'exerçant sur cet ensemble, on prendra d'abord un ensemble (ou alphabet) X de cardinalité $k = n + 1$. Les lettres (éléments de X) a et q étant distinctes, on considère l'ensemble $\mathcal{B}$ des bipermutations ayant q (resp. a) comme ultime gauche (resp. droite). Soit $\mathcal{A}$ l'alphabet des ultimes, c'est à dire l'alphabet obtenu en complétant $X \setminus \{a, q\}$ par la "lettre" $\underset{a}{q}$, il est de cardinalité n et pourra être canoniquement identifié à l'ensemble donné initialement.

9.1.2. DÉFINITION. Nous dirons qu'une bipermutation est $(k1)$ -quasi involutive si et seulement si sa substitution typique est de la forme :

$$\varphi = (1 \theta k) \varphi_1,$$

φ_1 ne comportant que des cycles de longueur 1 et 2.

9.1.3. LEMME. Les substitutions σ_1 et σ_2 , naturellement attachées à une bipermutation $(k1)$ -quasi involutive peuvent être canoniquement identifiées à des substitutions de $\mathcal{G}_\alpha$ et deviennent alors deux involutions égales.

Preuve. — Il suffit de considérer, dans chacune des substitutions naturellement attachées à b , le cycle qui provient de $(10k)$.

σ_1 contient la transposition $(\bar{f}^{(k)} \bar{f}^{(0)})$, dans laquelle $\bar{f}^{(0)}$ est identique à $\bar{f}^{(1)}$.

σ_2 contient la transposition $(\bar{f}^{(k)} \bar{f}^{(0)})$, dans laquelle $\bar{f}^{(k)}$ est identique à $\bar{f}^{(1)}$.

Ces deux cycles peuvent être identifiés à $(f^{(1)} f^{(0)})$, c'est à dire à $(a f^{(0)})$.

EXEMPLE:

$$b = \begin{matrix} 4 & 6 & 8 & \overline{11} & 9 & 2 & \overline{10} & 3 & 5 & 7 & 1 \\ d & f & h & k & i & b & j & c & e & g & a \end{matrix} ;$$

$$\sigma_2 = (ad)(bf)(ch)(ei)(gj) = \sigma_1 ;$$

$$\tau_D = (d f h a i b j c e g) ;$$

$$\tau_G = (a j i h g f e d c b) ;$$

$$\sigma = (a h j b i)(c d e f g).$$

9.1.4. LEMME. Soit, pour $\sigma \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}_\alpha}$, une décomposition $\sigma = \varepsilon \gamma^{-1} \varepsilon \gamma$ où ε est une involution, γ un cycle maximal; soit encore $\text{Card } \mathcal{G} = n$.

Si $n \not\equiv 2 \pmod{4}$, ε admet au moins un point fixe.

Preuve. — Preuve par cas.

1. Si n est impair, il est impossible que ε soit un produit de transpositions.

2. Si $n = 4\lambda$, γ est une substitution impaire, et ε doit donc l'être aussi. Or, si ε n'avait aucun point fixe, elle serait produit de 2λ transpositions, donc paire : contradiction.

Conséquence. Une condition nécessaire pour que ε soit sans point fixe est $n \equiv 2 \pmod{4}$. Soit alors $n = 4\lambda + 2$, il est effectivement loisible de prendre pour ε un produit de $(2\lambda + 1)$ transpositions.

9.2. Triplets $(\sigma, \gamma, \varepsilon)$; $\gamma \varepsilon \sigma = \varepsilon \gamma$.

9.2.1. PROPOSITION. A toute décomposition de la forme $\sigma = \varepsilon \gamma^{-1} \varepsilon \gamma$, $\sigma \in \mathcal{P}_G$; $\varepsilon, \gamma \in \mathcal{G}_G$; ε involution, γ cycle maximal, on peut associer au moins une bipermutation $(f, f') \in \mathcal{B}_{\min}$ de telle sorte que :

a) σ soit la substitution pi-frontalière de (f, f') ; ε et $\gamma^{-1} \varepsilon \gamma$ les substitutions naturellement attachées à (f, f') ;

b) (f, f') soit $(k+1)$ -involutive si ε admet au moins un point fixe et quasi-involutive si ε est sans point fixe; avec $k = 1 + \text{Card } G$.

Preuve. — 1. On peut toujours supposer (9.1.1.) que le point fixe de ε est la lettre $\frac{a}{a}$ de G . On

vérifie qu'il suffit de prendre :

$$f = a \quad a \cdot \gamma^{-1} \quad a \cdot \gamma^{-2} \dots a \cdot \gamma^{-n+1} \quad q \quad ,$$

$$f' = q \quad a \cdot \gamma \varepsilon^{-1} \quad a \cdot \gamma \varepsilon^{-2} \dots a \cdot \gamma^{-n+1} \varepsilon \quad a \quad .$$

2. Si ε n'admet pas de point fixe, auquel cas l'on a (9.1.4.) $n = 4\lambda + 2$ et $k = \lambda + 3$, on vérifie qu'il suffit de prendre :

$$f = a \quad a \cdot \gamma^{-1} \dots a \cdot \gamma^{-\theta+1} \quad a \cdot \gamma^{-\theta} \quad a \cdot \gamma^{-\theta-1} \dots a \cdot \gamma^{-n+1} \quad q \quad ,$$

$$f' = a \cdot \gamma^{-\theta} \quad a \cdot \gamma \varepsilon^{-1} \dots a \cdot \gamma^{-\theta+1} \varepsilon \quad q \quad a \cdot \gamma^{-\theta-1} \varepsilon \dots a \cdot \gamma^{-n+1} \varepsilon \quad a \quad .$$

9.2.2. THÉORÈME. Soit $T(\mathcal{A})$ l'ensemble des triplets :
 $(\sigma, \gamma, \varepsilon)$ tels que $\gamma \varepsilon \sigma = \varepsilon \gamma$; $\sigma \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$; $\varepsilon, \gamma \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$;
 γ cycle maximal, ε involution. Soit $T'(\mathcal{A}, a)$ la
partie de $T(\mathcal{A})$ pour laquelle ε admet un point
fixe déterminé $a \in \mathcal{A}$. Soit pour $n = \text{Card } \mathcal{A} \equiv 2 \pmod{4}$
- seul cas où il existe - $T''(\mathcal{A})$ le sous-ensemble de
 $T(\mathcal{A})$ pour lequel ε est sans point fixe.

D'autre part, X étant l'alphabet de cardinalité
 $k = n+1$ associé à $\mathcal{A}$, soit $\mathcal{B}'$ (resp. $\mathcal{B}''$ si $n \equiv 2 \pmod{4}$)
l'ensemble des bipermutations $(k1)$ -involutives
(resp. $(k1)$ -quasivolutives) sur X .

L'application qui envoie $b \in \mathcal{B}'$ (resp. $b \in \mathcal{B}''$)
sur $(\sigma, \tau_{\mathcal{G}}, \tau_{\mathcal{H}1} = \tau_{\mathcal{H}2})$, σ substitution pi-frontalière
de b , $\tau_{\mathcal{G}}$ cycle attaché au membre de gauche, $\tau_{\mathcal{H}1}$
 $(= \tau_{\mathcal{H}2})$ substitution naturellement attachée à b ,
est une surjection de $\mathcal{B}'$ sur T' (resp. $\mathcal{B}''$ sur T'').

Preuve. — Résulte immédiatement de la proposition
précédente.

sans point fixe

Remarques. En vertu de la PROPOSITION 9.2.1., à tout couple (ε, γ) correspond au moins un triplet de T' si ε admet le point fixe a , de T'' si ε est sans point fixe.

La question de savoir si à toute substitution $\sigma \in \mathcal{P}_\alpha$ correspond au moins un triplet reste ouverte à ce stade; il y est répondu ci-après.

9.3. Bipermutations spéciales.

9.3.1. En associant à toute bipermutation $b \in \mathcal{B}_{\text{min}}$ sa substitution π -frontalière, on définit une application spf de $\mathcal{B}_{\text{min}}$ dans le groupe alterné $\mathcal{P}_\alpha$.
L'introduction de la notion de bipermutation spéciale a comme premier but d'établir que spf est une surjection.

9.3.2. DÉFINITION. Nous dirons que le type $\langle \varphi \rangle$ est spécial (ou le type d'une bipermutation spéciale) si et seulement s'il est de la forme :

$$\langle \varphi \rangle = \langle k \ S_1 \dots S_i \dots S_\lambda \ 1 \rangle, \quad 1 \leq i \leq \lambda,$$

avec des tranches S_i dont ^{chacune} est soit un entier positif unique, soit une progression arithmétique de raison -1 à termes entiers positifs, et de telle façon que l'on ait :

$$\begin{aligned} S_1 &= j_1 \dots 2; \\ S_2 &= j_2 \dots 1+j_1; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ S_\lambda &= j_\lambda \dots 1+j_{\lambda-1}. \end{aligned}$$

EXEMPLES. Pour $k=9$, les types $\langle 9 \ 32 \ 4 \ 876 \ 1 \rangle$, $\langle 9 \ 432 \ 5 \ 6 \ 87 \ 1 \rangle$, $\langle 9 \ 432 \ 65 \ 87 \ 1 \rangle$ etc. sont spéciaux.

Remarques. 1. Si deux tranches successives se réduisent l'une et l'autre à un seul entier, on a la séquence $j \ j+1$. Le type est réductible et celui que l'on forme par réduction reste spécial.

2. Un type spécial dont la première (resp. dernière) tranche est 2 (resp. $k-1$) est médiatement π -u-réductible (resp. π -réductible).

3. Le type obtenu à partir d'un type spécial par la déletion de $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \sigma, \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \sigma^{-1} \right\}$ reste spécial.

9.3.3. PROPOSITION. Un type spécial est $(k1)$ -involutif et parfait.

Preuve.— Le caractère involutif est évident. Au reste, la proposition est vraie pour $k=2$ et $k=3$, on l'étend par récurrence en utilisant la remarque 3.

9.3.4. LEMMES. Nous utilisons les notations définies en 8.2.1.

LEMME A. Les bipermutations spéciales dont le type est donné par la loi :

$$\langle \overline{4\mu+1} \mid 432 \mid 5 \dots \mid \overline{3i+1} \ 3i \ \overline{3i-1} \mid \overline{3i+2} \mid \dots \ 1 \rangle$$

ont pour substitution π -frontalière un produit de transpositions.

Preuve.— La vérification est immédiate.

LEMME B. Soient les deux bipermutations spéciales :

$$b = \begin{pmatrix} k & S_1 & S_2 & \dots & S_\lambda & 1 \\ q & S_{1L} & S_{2L} & \dots & S_{\lambda L} & a \end{pmatrix}, \text{ et :}$$

$$b' = \begin{pmatrix} k+2 & 3 & 2 & S_1^{+2} & S_2^{+2} & \dots & S_\lambda^{+2} \\ q & z & x & S_{1L} & S_{2L} & \dots & S_{\lambda L} \end{pmatrix};$$

la substitution π -frontalière de b' et celle de b ont en commun tous les cycles autres que ceux, Γ'_a et Γ_a de q ; de plus $\Gamma'_a = (x \Gamma_a z)$.

Preuve. — La vérification est immédiate.

9.3.5. PROPOSITION. Soit $\mathcal{S}$ la partie de $\mathcal{B}_{\text{min}}$ formée par les bipermutations spéciales, l'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, définie par la formation spf de la substitution π -frontalière, est surjective.

Preuve. — La proposition est vraie pour $k=2$ et $k=3$. On l'étend par récurrence, aux cas qui ne relèvent pas du LEMME A, en utilisant le LEMME B.

9.3.6. THÉORÈME. Toute substitution $\sigma \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ entre dans au moins un triplet de T' (resp. T'') et l'on obtient toutes les paires associées (E, γ) ,

- 1) en formant tous les π -systèmes ayant σ comme substitutions π -frontalière;
- 2) en prenant dans chaque système les bipermutations $(k1)$ -involutives (resp. $(k1)$ -quasivolutives appropriées).

En particulier il existe dans T' au moins une solution correspondant à une décomposition diédrale.

Preuve. — Corollaire direct des résultats précédents.

10. Π -systèmes et bipermutations spéciales.

10. π -Systèmes et bipermutations spéciales.

10.1. Sur la substitution π -frontalière.

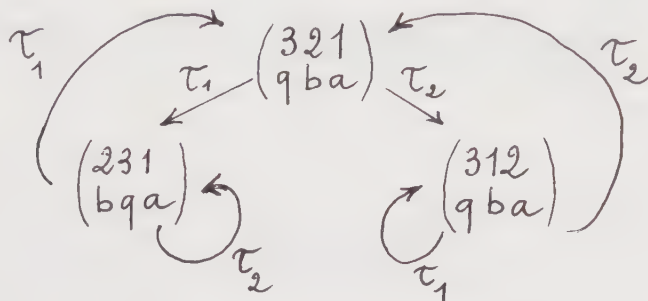
10.1.1. Les notations $X, \mathcal{A}, q, a, x, z, k$, gardent leur signification précédente. Il sera fait usage, à l'intérieur d'un π -système A , de π -systèmes contraints, où l'ensemble de contrainte est formé par la lettre q , ultime gauche, de rang fixe k .

b étant une bipermutation de A , il se peut qu'elle ne contienne aucune lettre explicitement forte, auquel cas le π -système q -contraint qu'elle engendre se réduit aux seules bipermutations obtenues par τ_1 (exemples : pour les types $\langle 9154328764 \rangle, \langle 932184765 \rangle$, etc.). Il se peut que b contienne une lettre explicitement forte w , auquel cas cette lettre est unique et reste telle, pour A , dans tout le système q -contraint.

10.1.2. PROPOSITION. Le π -système engendré par la bipermutation spéciale à retournement complet,

c'est à dire de type $\langle k \ k-1 \dots 3 \ 2 \ 1 \rangle$, ne comprend pas d'autre bipermutation spéciale.

Preuve. — La proposition est vraie pour $k=2$, avec le système réduit à la seule bipermutation $\begin{pmatrix} 21 \\ qa \end{pmatrix}$. Elle est vraie pour $k=3$, avec le système :



On l'étend par récurrence en utilisant le système contraint sur $\{x, z\}$.

Remarque. On démontre aisément que ce système contient $2^{k-1} - 1$ bipermutations.

10.1.3. PROPOSITION. A étant un π -sbm, b et $\hat{b}$ deux bipermutations de A dans lesquelles la lettre u est explicitement forte ;

1. les systèmes q -contraints $\mathbb{C}[b; q]$, $\hat{\mathbb{C}}[\hat{b}; q]$ portent deux systèmes libres A_p et $\hat{A}_p$ qui ont la même substitution π -frontalière σ_p donnée par :

$$\sigma_p = \mathcal{S}_q (\sigma \cdot (wq)) ;$$

2. si $\mathbb{C}$ et $\hat{\mathbb{C}}$ sont disjoints dans A , alors A_p et $\hat{A}_p$ ne sont pas isomorphes.

Preuve. — 1. On vérifie immédiatement la loi donnant σ_p , qui est nécessaire et préalable à l'existence du système $\mathbb{C}$ (ou $\hat{\mathbb{C}}$).

2. Etant donnée une bipermutation $\mathcal{B}'$ de $\hat{A}_p$, on en déduit (à une variante près, équivalente par τ_1) la bipermutation correspondante $\mathcal{B}$ de A , la place de q étant déterminée par σ .

Si $\mathcal{B}'$ et $\hat{\mathcal{B}}'$ étaient deux bipermutations isotopes dans $\hat{A}_p$ et $\hat{A}_p$ respectivement, $\mathcal{C}$ et $\hat{\mathcal{C}}$ ne pourraient donc pas être disjoints.

10.1.4. PROPOSITION. Pour $k \geq 6$ il peut exister plusieurs π -systèmes différents ayant la même substitution π -frontalière.

Preuve. — Pour $k = 6$, les bipermutations :

$$\mathcal{B} = \begin{array}{cccccc} 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ q & z & x & u & v & a \end{array} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = \begin{array}{cccccc} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ q & u & x & z & v & a \end{array},$$

ont la même substitution π -frontalière $\sigma = \begin{pmatrix} 9 & x & v & u & z \\ a \end{pmatrix}$. Or en vertu de la PROPOSITION 10.1.2. la bipermutation $\mathcal{B}'$ est la seule spéciale dans le π -sbm qu'elle engendre.

Ce résultat avait d'ailleurs été donné dans le LEMME 7.2.5.; le calcul prouve que $\mathcal{B}$ engendre un système à 134 bipermutations, dont les trois autres involutives de types $\langle 351624 \rangle$, $\langle 465132 \rangle$, $\langle 546213 \rangle$.

Sur ce modèle, on peut former une infinité d'exemples.

Une autre façon de démontrer la proposition consiste à utiliser la PROPOSITION 10.1.3., à condition de prouver que les porteurs $\mathcal{C}$ et $\hat{\mathcal{C}}$ sont disjoints.

EXEMPLE. Soit $\mathcal{B} = \begin{array}{cccccc} 10 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 9 & 8 & 1 \\ j & y & f & e & d & c & b & i & h & a \end{array};$

la lettre forte donne immédiatement le système j -contraint porteur du système libre engendré par

$b' = \begin{matrix} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ i & h & g & f & e & d & c & b & a \end{matrix}$. Le calcul montre que le

π -sbm engendré par b contient aussi

$$\hat{b} = \begin{matrix} 9 & 3 & 2 & 6 & 10 & 5 & 4 & 8 & 7 & 1 \\ i & c & g & h & j & e & f & b & d & a \end{matrix},$$

qui n'appartient plus au premier système contraint.

La bipermutation

$$\hat{b}' = \begin{matrix} 9 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 8 & 7 & 1 \\ i & c & g & h & e & f & b & d & a \end{matrix},$$

et la bipermutation b' ont la même substitution π -frontalière:

$$\sigma_p = \begin{pmatrix} i & g & e & c \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & d & b & h \end{pmatrix} = \sum_j \left(\begin{pmatrix} j & f & d & b & h & i & g & e & c \\ a \end{pmatrix} (ij) \right).$$

La PROPOSITION 10.1.3. permet d'affirmer que b' et $\hat{b}'$ n'engendrent pas le même système, et la PROPOSITION 10.1.2. confirme directement cette conclusion.

10.1.5. CONSÉQUENCE. Etant donné un π -sbm Λ , l'invariant que constitue la substitution π -frontalière σ pour toutes les bipermutations de Λ n'est un invariant caractéristique.

En fait, la donnée de Λ détermine une famille de décompositions de $\sigma \in \mathcal{P}_{6\alpha}$ en produits $\tau_D \cdot \tau_G$ et, plus particulièrement, s'agissant des bipermutations de forme $(k1)$, en produits de cycles maximaux $\gamma \cdot \gamma'$; $\gamma, \gamma' \in \mathcal{G}_\alpha$.

La question se pose donc de distinguer entre les divers π -sbm qui ont la même π -frontalière.

10.2. Emploi des substitutions spéciales.

10.2.1. Les résultats donnés dans le LEMME 7.2.5. montrent que pour $k \leq 6$, tout π -sbm contient au moins une bipermutation spéciale.

Cette proposition se généralise.

Etant donné d'une part la longueur déjà prise par le présent travail et la longueur des preuves combinatoires d'autre part, nous nous bornerons à présenter la méthode de démonstration.

10.2.2. THÉOREME. Tout π -sbm contient au moins une bipermutation spéciale.

Preuve.— (Indications sur la) On procède par récurrence.

Dans un π -sbm A , il existe toujours une lettre forte w et une bipermutation b où w est explicitement forte. On forme le système q -contraint $C[b, q]$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, le π -système libre A_p porté par C contient une bipermutation spéciale b' , laquelle donne dans A une bipermutation b' que nous appellerons quasi-spéciale.

Le théorème sera donc établi si l'on démontre le lemme suivant.

LEMME A. A partir de toute bipermutation quasi-spéciale on peut dériver par les π -opérations une bipermutation spéciale.

La démonstration se fait en montrant que les

cas à étudier, selon la position de q entre deux tranches ou à l'intérieur d'une tranche de la bipermutation quasi-spéciale, sont en nombre fini; on pourra donc toujours "copier" $\bar{a}$ à l'ordre $n+1$ les calculs faits à l'ordre n .

Il suffit de s'occuper des π -sbm qui sont ou bien non réductibles, ou bien au plus une fois π -réductibles, ou bien au plus une fois médiatement π -u-réductibles.

1. Voyons le passage de $k=6$ à $k=7$.

a) A partir de 6 3 2 5 4 1

(1)	7 6 3 2 5 4 1 g f c b e d a
par τ_1 :	4 7 6 3 2 5 1 d g f c b e a
par τ_2 :	4 7 6 1 3 5 2 d g f c b e a
par τ_1 :	6 4 7 1 3 5 2 f d g c b e a
par τ_2 :	6 5 7 2 4 1 3 f d g c b e a
par τ_1 :	4 6 5 7 2 1 3 b f d g c e a
par τ_2 :	4 6 5 7 3 2 1 b f d g c e a
par τ_1 :	7 3 2 4 6 5 1 g c e b f d

qui est spéciale.

(2)

6	7	3	2	5	4	1
f	g	c	b	e	d	a

réductible ;

par τ_1 :

7	3	2	5	4	6	1
g	c	b	e	d	f	a

médiatement pu-réductible,
spéciale.

(3)

6	3	7	2	5	4	1
f	c	g	b	e	d	a

pu-réductible ;

par τ_2 :

6	5	7	4	2	1	3
f	c	g	b	e	d	a

par τ_1 :

4	2	6	5	7	1	3
b	e	f	c	g	d	a

par τ_2 :

4	3	6	5	7	2	1
b	e	f	c	g	d	a

par τ_1 :

7	2	4	3	6	5	1
g	d	b	e	f	c	a

pu-réductible,
spéciale.

(4)

6	3	2	7	5	4	1
f	c	b	g	e	d	a

par τ_1 :

7	5	4	6	3	2	1
g	e	d	f	c	b	a

par τ_2 :

7	6	5	1	4	3	2
g	e	d	f	c	b	a

par τ_1 :

6	5	7	1	4	3	2
e	d	g	f	c	b	a

par τ_2 :

6	4	7	5	3	2	1
e	d	g	f	c	b	a

par τ_1 :

5	3	2	6	4	7	1
f	c	b	e	d	g	a

par τ_2 :

5	4	3	6	1	7	2
f	c	b	e	d	g	a

par τ_1 :

3	6	5	4	1	7	2
b	e	f	c	d	g	a

par τ_2 :

3	6	5	4	2	7	1
b	e	f	c	d	g	a

par τ_1 :

4	2	7	6	5	1	3
c	d	g	b	e	f	a

par τ_2 :

4	3	7	1	6	5	2
c	d	g	b	e	f	a

par τ_1 :

7	4	3	1	6	5	2
g	c	d	b	e	f	a

par τ_2 :

7	3	2	6	5	4	1
g	c	d	b	e	f	a

spéciale.

(5)

6	3	2	5	7	4	1
f	c	b	e	g	d	a

par τ_2 :

6	5	4	2	7	1	3
f	c	b	e	g	d	a

par τ_1 :

7	6	5	4	2	1	3
g	f	c	b	e	d	a

par τ_2 :

7	4	3	2	6	5	1
g	f	c	b	e	d	a

spéciale.

Remarque. Lorsque le groupe des isotypies n'est pas trivial, il existe des voies différentes, selon la lettre que l'on choisit de garder forte. Par exemple, pour

(4) on aurait pu procéder autrement.

B) A partir de 654321.

Le résultat est évident dans ce cas.

C) A partir de 625431.

(1)

7	6	2	5	4	3	1
g	f	b	e	d	c	a

par τ_1 :

3	7	6	2	5	4	1
c	g	f	b	e	d	a

on exploite l'analogie avec
a) (1).

par τ_2 :

3	7	6	1	5	4	2
c	g	f	b	e	d	a

par τ_1 :

6	3	7	1	5	4	2
f	c	g	b	e	d	a

par τ_2 :

6	4	7	2	1	5	3
f	c	g	b	e	d	a

par τ_1 :

4	7	2	6	1	5	3
c	g	b	f	e	d	a

par τ_2 :

4	7	3	6	2	5	1
c	g	b	f	e	d	a

par τ_1 :

6	2	5	4	7	3	1
f	e	d	c	g	b	a

par τ_2 :

6	5	3	2	7	1	4
f	e	d	c	g	b	a

par τ_1 :

7	6	5	3	2	1	4
g	f	e	d	c	b	a

par τ_2 :

7	3	2	6	5	4	1
g	f	e	d	c	b	a

spéciale.

(2)

6	7	2	5	4	3	1
f	g	b	e	d	c	a

 réductible ($Cf(a)(2)$) et
 pu-réductible;
 par τ_1

7	2	5	4	3	6	1
g	b	e	d	c	f	a

 spéciale, pi-médiatement
 réductible et pu-réductible.

(3)

6	2	7	5	4	3	1
f	b	g	e	d	c	a

 par τ_2 :

6	4	7	2	1	5	3
f	b	g	e	d	c	a

 par τ_1 :

4	7	2	6	1	5	3
b	g	e	f	d	c	a

 par τ_2 :

4	7	3	6	2	5	1
b	g	e	f	d	c	a

 par τ_1 :

7	3	6	2	5	4	1
g	e	f	d	c	b	a

 par τ_2 :

7	4	1	3	6	5	2
g	e	f	d	c	b	a

 par τ_1 :

4	7	1	3	6	5	2
e	g	f	d	c	b	a

 par τ_2 :

4	7	3	2	6	5	1
e	g	f	d	c	b	a

 par τ_1 :

7	3	2	6	5	4	1
g	f	d	c	b	e	a

 spéciale.

(4)

6	2	5	7	4	3	1
f	b	e	g	d	c	a

 par τ_2 :

6	5	3	7	2	1	4
f	b	e	g	d	c	a

 par τ_1 :

5	3	7	2	6	1	4
b	e	g	d	f	c	a

par τ_2 :
 5, 4, 7, 3, 6, 2, 1,
 b e g d f c a

par τ_1 :
 6 2 5 4 7 3 1
 f c b e g d a

par τ_2 :
 6 5 3 2 7 1 4
 f c b e g d a

par τ_1 :
 7 6 5 3 2 1 4
 g f c b e d a

par τ_2 :
 7 3 2 6 5 4 1 spéciale.
g f c b e d a

(5) 6 2 5 4 7 3 1 on exploite l'analogie
 f b e d g c a avec (a)(5).

par τ_2 :
 6 5 3 2 7 1 4
 f b e d g c a

par τ_1 :
 7 6 5 3 2 1 4
 g f b e d c a

par τ_2 :
 7 3 2 6 5 4 1
 g f b e d c a spéciale.

d) A partir de 6 4 3 2 5 1

et c.

La démonstration consiste, en analysant les passages de 6 à 7 et 7 à 8, à montrer que les procédés employés seront transférables aux ordres supérieurs.

10.3. Dénombrement des types spéciaux.

10.3.1. L'importance des types spéciaux justifie que l'on se pose à leur propos des problèmes de dénombrement.

En particulier le nombre des types non réductibles (directement ou médiatement) majore le nombre des π -sbm utiles pour les équations.

10.3.2. PROPOSITION. Le nombre des types spéciaux dépourvus de toute réductibilité est donné par la relation de récurrence "métafibonacciennne":

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n,$$

avec $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1$.

Preuve. — u_n est égal au nombre des façons dont on peut pratiquer des tranches dans la suite:

$$2, 3, 4, \dots, n-2, n-1,$$

de telle sorte que :

- a) la première (resp. dernière) tranche ne se réduise pas à 2 (resp. $n-1$);
- b) il n'y ait pas deux tranches consécutives de longueur 1.

Entre deux entiers de la suite, écrivons 0 si la place ne correspond pas à une coupure, 1 si elle y correspond. Nous obtenons ainsi un numéro binaire de $n-2$ chiffres, qui commence et finit

nécessairement par un zéro. La partie utile est donc un numéro de $n-4$ chiffres binaires, et il faut en écarter ceux qui présentent trois chiffres 1 consécutifs.

On obtient donc tous ^{les} cas relatifs à u_{n+3} , et ce une seule fois, en préfixant les numéros relatifs à u_{n+2} par 0, ceux de u_{n+1} par 10 et ceux de u_n par 110.

Conséquence. La fonction génératrice donnant les nombres des types en cause est

$$F(t) = \frac{t^4}{1 - t - t^2 - t^3}.$$

10.3.3. Indications numériques.

On obtient:

$$u_4 = 1$$

$$u_5 = 1$$

$$u_6 = 2$$

$$u_7 = 4$$

$$u_8 = 7$$

$$u_9 = 13$$

$$u_{10} = 24$$

$$u_{11} = 44$$

$$u_{12} = 81$$

$$u_{13} = 149$$

$$u_{14} = 274$$

$$u_{15} = 504$$

$$u_{16} = 927$$

et c...

Nombre que l'on peut rapprocher des valeurs prises par la fonction f , partie 6.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] C. CHEVALLEY, Fundamental concepts of algebra, Academic Press, (1956) Chap. I.
- [2] P. M. COHN, Factorization in non-commutative power series rings, Proc. Cambridge Philos. Soc. 58 (1962), p. 449 - 464.
- [3] M. HALL^{Jr}, The Theory of GROUPS, the Macmillan Company (1959), p. 320 et seq.
- [4] A. JACQUES, CL. LENORMAND, A. LENTIN, J.-C. PERROT, Un résultat extrémal en théorie des permutations, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 266 (1968), p. 446 - 448.
- [5] A. LENTIN, Sur l'équation $a^M = b^N c^P d^Q$ dans un monoïde libre, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 260 (1965), p. 3242 - 3244.
- [6] F. W. LEVI, On semigroups, Bull. Calcutta Math. Soc. 36 (1944) p. 141 - 146.
- [7] R. C. LYNDON, M. P. SCHÜTZENBERGER, The equation $a^M = b^N c^P$ in a free group, Michigan Math. J. vol. 9 (1962) p. 289 - 298.
- [8] O. ORE, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951) p. 307 - 314.
- [9] W. V. QUINE, Concatenation as a basis for arithmetic, J. of Symbolic Logic, t. 11 (1946), p. 105 - 114.
- [10] M. P. SCHÜTZENBERGER, Sur l'équation $a^{2+n} = b^{2+m} c^{2+p}$ dans un groupe libre, C.R. Acad. Sc. Paris t. 248 (1959), p. 2435 - 2436.

Some remarks
on commutators

Errata

Page. ligne

4 12

8 5 et 6

au lieu de :

$$f, g \in (X \setminus \{x\})^*$$

un invariant

lire :

$$f, f' \in (X \setminus \{x\})^*$$

une relation

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

*Le théorème de R.H.BING sur l'approximation d'une surface
par un polyèdre et quelques-unes de ses conséquences.*

Vu et approuvé

Paris, le ... 5. juin. 1969

Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris

Marc ZAMANSKY

Vu
et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

Jean ROCHE

